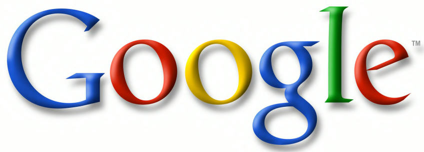
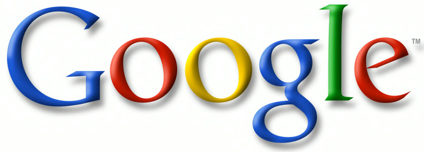







SUB LIBERTATE FLORENT
AMERICAN ACADEMY OF ARTS & SCIENCES.
MDCCLXXX.
The GIFT of

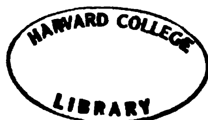
ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ XIII.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36
1891.



Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Секретарь общества *П. Бучинскій.*

MÉMOIRES

de la section mathématique

de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie

(Odessa).

T. XIII.

СОДЕРЖАНІЕ.

TABLE DES MATIÈRES.

Къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

М. П. Рудзкаго.

Въ настоящей статейкѣ я желаю отмѣтить, что дифференціальное линейное уравненіе:

$$\varphi_n \frac{d}{dx} \varphi_{n-1} \frac{d}{dx} \cdots\cdots \varphi_1 \frac{du}{dx} = u \qquad (1) \ (*)$$

, въ которомъ:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

суть функціи отъ x, связано съ группой подобныхъ ему дифференціанальныхъ уравненій вида:

$$\varphi_k \frac{d}{dx} \varphi_{k+1} \frac{d}{dx} \cdots \varphi_n \frac{d}{dx} \varphi_1 \frac{d}{dx} \cdots \varphi_{k-1} \frac{p}{dv} = (-1)^n v \ldots\ldots \qquad (2)$$

, гдѣ k поочереди равно $1, 2, \ldots n$; ибо если возьмемъ функціи:

$$u_1 \ u_2 \ldots\ldots u_n$$

удовлетворяющія уравненію (1), а потомъ еще функціи:

$$\left.\begin{aligned} \mu_i^{(1)} &= \varphi_1 \frac{du_i}{dx} \\ \mu_i^{(2)} &= \varphi_2 \frac{d\mu_i^{(1)}}{dx} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(*) Это уравненіе слѣдуетъ понимать такъ: производную отъ u умножаемъ на φ_1, потомъ образуемъ производную отъ этого произведенія, умножаемъ на φ_2 и т. д.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_i^{(h)} = \varphi_h \frac{d\mu_i^{(h-1)}}{dx}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_i^{(n-1)} = \varphi_{n-1}\frac{d\mu_i^{(n-2)}}{dx}$$

и составимъ опредѣлитель n таго порядка:

$$M = \begin{vmatrix} u_1 \ldots\ldots u_n \\ \mu_1^{(1)} \ldots\ldots \mu_n^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mu_1^{(n-1)} \ldots\ldots \mu_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

а потомъ его подопредѣлители, принадлежащіе къ элементамъ k той строки и i той колоны:

$$M_{k,i} = \begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_{i-1} & u_{i+1} & \ldots & u_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{(k-2)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(k-2)} & \mu_{i+1}^{(k-2)} & \ldots & \mu_n^{(k-2)} \\ \mu_1^{(k)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(k)} & \mu_{i+1}^{(k)} & \ldots & \mu_l^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{(n-1)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(n-1)} & \mu_{i+1}^{(n-1)} & \ldots & \mu_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

то подопредѣлители:

$$M_{k,i}$$

удовлетворяютъ уровненіямъ выда (2), именно подопредѣлитель принадлежащій къ k той строкѣ удовлетворяетъ уравненію, въ которомъ коэффиціентъ: φ_k стоитъ на крайнемъ мѣстѣ съ лѣвой стороны.

Доказательство сказаннаго основывается на слѣдующихъ двухъ равенствахъ:

$$M_{k,i} = \varphi_k \frac{d}{dx}(M_{k+1,i}) \qquad (6)$$

, когда: $k=1,\ 2,\ldots(n-1)$, но

$$M_{n,i}=(-1)^{n}\varphi_{n}\frac{d}{dx}(M_{1,i}) \tag{7}$$

Эти равенства доказываются очень просто. Если дѣйствительно продифференцируемъ опредѣлитель: $M_{k+1,i,}$ то получимъ $_{n-1}$ опредилителей сходныхъ съ даннымъ опредѣлителемъ. Единственное различіе состоитъ въ томъ, что въ первомъ изъ опредѣлителей, составляющихъ производную, вмѣсто строки:

$$u_1\ldots\ldots v_{i-1}\ u_{i+1}\ldots\ldots u_n$$

, будетъ строка:

$$\frac{du_1}{dx}\cdots\cdots\frac{du_{i-1}}{dx}\ \frac{du_{i+1}}{dx}\cdots\cdots\frac{du_n}{dx}$$

, во второмъ вмѣсто строки:

$$\overset{(1)}{\mu_i}\ \ldots\ldots\overset{(1)}{\mu}_{i-1}\ \overset{(1)}{\mu}_{i+1}\ \ldots\ldots\overset{(1)}{\mu}_n$$

, будетъ строка:

$$\frac{d\overset{(1)}{\mu_i}}{dx}\cdots\cdots\frac{d\overset{(1)}{\mu}_{i-1}}{dx}\frac{d\overset{(1)}{\mu}_{i+1}}{dx}\cdots\cdots\frac{d\overset{(1)}{\mu}_n}{dx}$$

и т. д.

Если возьмемъ во вниманіе уравненія: (3) то на основаніи извѣстной теоремы, что опредѣлитель, въ которомъ всѣ элементы одной строки равны соотвѣтственнымъ элементамъ другой строки, умноженнымъ на одинъ и тотъ-же множитель, равняется нулю; окажется, что всѣ эти опредѣлители равны нулю, кромѣ одного, именно кромѣ того, въ которомъ строка:

$$\overset{(k-1)}{\mu_1}\ \ldots\ldots\overset{(k-1)}{\mu}_{i-1}\ \overset{(k-1)}{\mu}_{i+2}\ \ldots\ldots\overset{(k-1)}{\mu}_n$$

замѣнена строкой: *)

*) Обращаю вниманіе читателя на то, что здѣсь разсматривается производная опредѣлителя $M_{k+1,i}$

$$\frac{d\overset{(k-1)}{\mu_1}}{dx} \cdots \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_i}}{dx} \; \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_{i+1}}}{dx} \cdots \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_n}}{dx}$$

Если наконецъ въ этомъ послѣднемъ опредѣлителѣ, сдѣлаемъ общій множитель: φ_k множителемъ элементовъ именно этой строки:

$$\frac{d\overset{(k-1)}{\mu_1}}{dx} \cdots \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_{i-1}}}{dx} \; \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_{i+1}}}{dx} \cdots \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_n}}{dx}$$

, то окажется, что этотъ единственный, оставившійся опредѣлитель есть ничто иное, какъ:

$$M_{k,\,i}$$

Такимъ образомъ равенство: (6) обращается въ тождество. Что касается равенства: (7), то при исполненіи дифференціаціи надъ опредѣлителемъ: $M_{1,i}$ всѣ опредѣлители, составляющіе производную оказываются равны нулю, кромѣ однаго, въ которомъ послѣдняя строка опредѣлителя: $M_{1,i}$ или строка:

$$\overset{(n-1)}{\mu_i} \cdots\cdots \overset{(n-1)}{\mu_{i-1}} \; \overset{(n-1)}{\mu_{i+1}} \cdots\cdots \overset{(n-1)}{\mu_n}$$

замѣняется строкой:

$$\frac{d\overset{(n-1)}{\mu_1}}{dx} \cdots \frac{d\overset{(n-1)}{\mu_{i-1}}}{dx} \; \frac{d\overset{(n-1)}{\mu_{i+1}}}{dx} \quad \frac{d\overset{(n-1)}{\mu_n}}{dx}$$

Но на основаніи уравненій: (3) и уравненій: (1):

$$\varphi_n \frac{d\overset{(n-1)}{\mu_i}}{dx} = u_i$$

, а потому, если перенесемъ эту послѣднюю строку на первое мѣсто, то окажется, что равенство: (7) есть тождество.— Дѣйствительно, при передвиженіи любой строки на одно мѣсто опредилитель мѣняетъ свой знакъ. Здѣсь мы должны совершить

$n-2$ такихъ передвиженій съ послѣдней строкой, слѣдовательно мы должны ввести множитель: $(-1)^{n-2}$, или, что все равно: $(-1)^n$

Если теперь въ равенство:

$$M_{k,i}=\varphi_k\frac{d}{dx}(M_{k+1,i})$$

Подставимъ: $M_{k+1,i}$ изъ подобнаго ему равенства:

$$M_{k+1,i}=\varphi_{k+1}\frac{d}{dx}(M_{k+2,i})$$

и т. д. а $M_{n,i}$ подставимъ изъ равенства: (7) то получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\varphi_k\frac{d}{dx}\varphi_{k+1}\frac{d}{dx}\cdots\varphi_k\frac{d}{dx}\varphi_1\frac{d}{dx}\cdots\varphi_{k-1}\frac{d}{dx}(M_{k,1})=(-1)^n M_{k,i}$$

гдѣ

$$k=1,\ 2\ldots\ldots n$$

значитъ функція $M_{k,i}$ удовлетворяетъ уравненію: (2) Замѣтимъ теперь, что опредѣлители: $M_{1,i}$ равны частнымъ нѣкоторыхъ опредѣлителей, именно:

$$M_{1,i}=C.\frac{R_{1,i}}{R} \tag{8}$$

Гдѣ C есть постоянная:

$$R=\begin{vmatrix} u_1\ldots\ldots & u_n \\ \frac{du_1}{dx}\ldots\ldots & \frac{du_n}{dx} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}\ldots\ldots & \frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$R_{i,1} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} \cdots \frac{du_{i-1}}{dx} & \frac{du_{i+1}}{dx} \cdots \frac{du_n}{dx} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} \cdots \frac{d^{n}u_{i-1}}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}u_{i+1}}{dx^{n+1}} \cdots \frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

т. е. R есть опредѣлитель n таго порядка изъ функцій u_i и ихъ производныхъ до $n-1$ аго порядка включительно, а $R_{1,i}$ есть подопредѣлитель, принадлежащій къ i тому элементу первой строки опредѣлителя: R.

Дѣйствительно, всякое $\overset{(k)}{\mu_i}$ послѣ исполненія дифференціацій получаетъ слѣдующій видъ:

$$\overset{(k)}{\mu_i} = p_{k,k} \frac{d^k u_i}{dx^k} + p_{k,k-1} \frac{d^{k-1} u_i}{dx^{k-1}} + \cdots\cdots p_{k,1} \frac{du_i}{dx} \qquad (9)$$

Фунціи: $p_{k,k}, p_{k,k-1} \cdots\cdots p_{k,1}$ состоятъ изъ функцій φ и ихъ производныхъ. Онѣ могутъ быть легко найдены помощью формулы:

$$p_{k,h} = \varphi_k \left[p_{k-1,h-1} + \frac{d}{dx}(p_{k-1,h}) \right] \cdots \qquad (10)$$

которая даетъ возможность образовать поочереди всѣ коэффиціенты: $p_{k.h}$, начиная съ тѣхъ, въ которыхъ знаки: k и h имѣютъ самыя малы значенія.

Выражая въ опредѣлителѣ: $R_{1,i}$ всѣ функціи: μ помощью формулы: (9) и примѣняя извѣстную теорему, что значеніе опредѣлителя не измѣняется, если къ элементамъ любой его строки прибавить соотвѣтственные элементы другихъ строкъ, умноженные на нѣкоторые постоянные для данной строки множители, найдемъ слѣдующее:

$$M_{1,i} = \begin{vmatrix} \varphi_1 \dfrac{du_1}{dx} & \varphi_1 \dfrac{du_2}{dx} \cdots\cdots \\ \varphi_1\varphi_2 \dfrac{d^2 u_1}{dx^2} & \varphi_1\varphi_2 \dfrac{d^2 u_2}{dx^2} \cdots\cdots \\ \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n \dfrac{d^{n-1} u_1}{dx^{n-1}} & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

или

$$M_{1,i} = \varphi_1^{n-1} \cdot \varphi_2^{n-2} \cdots\cdots \varphi_{n-1} \begin{vmatrix} \dfrac{du_1}{dx} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^{n-1} u_1}{dx^{n-1}} \cdots\cdots \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Опредѣлитель, входящій въ составъ правой стороны равенства: (11) есть ничто иное, какъ:

$$R_{1,i}$$

Съ другой стороны мы можемъ доказать, что:

$$\varphi_1^{n-1} \cdot \varphi_2^{n-1} \cdots\cdots \varphi_{n-1} = \frac{C}{R} \qquad (12)$$

Дѣйствительно, если привести уравненіе: (1) къ виду:

$$q_n \frac{d^n u}{dx^n} + q_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + q_1 \frac{du}{dx} = u$$

то по общему свойству всѣхъ уравненій этого вида:

$$R = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{q_{n-1}}{q_n} dx} \qquad (13)$$

Но въ данномъ случаѣ, помощью формулы: (10) найдемъ:

$$q_n = \varphi_n \cdot \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$$

$$q_{n-1} = \varphi_n \frac{d}{dx}(\varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} \cdot \ldots \cdot \varphi_1) + \varphi_n \varphi_{n-1} \frac{d}{dx}(\varphi_{n-2} \cdot \ldots \cdot \varphi_1) + \ldots$$

$$+ \varphi_n \cdot \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \frac{d\varphi_1}{dx}$$

Подставляя эти значенія q_n и q_{n-1} въ формулу: (13) найдемъ формулу: (12).—Но коль скоро доказано равенство: (12) (8) тоже является доказаннымъ.

Замѣтимъ еще, что уравненіе, которому удовлетворяетъ функція:

$$M_{1,i}$$

тождественно съ такъ называемымъ соединеннымъ уравненіемъ, или «*equation adjointe*» у Жордана *). Это можетъ быть доказано непосредственно. Предполагая, что уравненіе, полученное подъ видомъ уравненія (2), гдѣ $k=1$, тождественно съ уравненіемъ, полученнымъ подъ такимъ видомъ, подъ какимъ оно является н. п. у Жордана, когда оба уравненія, положимъ, m таго порядка, нетрудно доказать тождество обоихъ видовъ для уравненій $(m+1)$ аго порядка.—Но частныя вида:

$$\frac{R_{1,i}}{R}$$

являются интегралами соединеннаго уравненія, не только въ разсматриваемомъ нами случаѣ, но вообще у всѣхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій вида:

$$q_n \frac{d^n u}{dx^n} + q_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-2}} + \ldots q_1 \frac{du}{dx} = u \qquad (14)$$

*) Cours d'analyse III томъ стр. 153

, гдѣ q_n, $q_{n-1}\cdots q_1$ есть вообще функціи отъ x вовсе независимыя другъ отъ друга. Дѣйствительно, если взять подопредѣлители функціональнаго опредѣлителя: R, состоящаго изъ функцій, [и ихъ производныхъ до $n-1$ аго порядка включительно] удовлетворяющихъ уравненію: (14), написать n извѣстныхъ связей между этими подопредѣлителями вида:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{R_{k,i}}{R}\right)-\frac{R_{k-1,i}}{R}-(-1)^k p_{k-1}\frac{R_{1,i}}{R}=0$$

, начиная съ $k=1$, до $k=n$, и подставить: $\frac{R_{n,i}}{R}$ изъ послѣдняго въ предпослѣднее, изъ этого опять: $\frac{R_{n-1,i}}{R}$ въ третье отъ конца и т. д.; то наконецъ получимъ уравненіе:

$$(-1)^n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_n\frac{d\omega}{dx}\right)+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(p_{n-1}\frac{d\omega}{dx}\right)+ \\ +\ldots\ldots-p_1\frac{d\omega}{dx}=\omega \qquad (15)$$

, гдѣ мы ради краткости положили:

$$\frac{R_{1,i}}{R}=\omega$$

Уравненіе (15) и есть уравненіе соединенное съ уравненіемъ: (14). Его интегралы имѣютъ то свойство, *) что уравненіе: (14), будучи умножено на одинъ изъ интеграловъ уравненія: (15), помощью интеграціи по частямъ приводится къ уравненію порядкомъ ниже на одну единицу.

*) Жорданъ loc. cit.

Механика подобно-измѣняемой системы.

Д. Н. Зейлигера.

Mechanik der ähnlich-veränderlicher Systeme

von D. Seiliger.

ВЫПУСКЪ ТРЕТІЙ.

Статика подобно-измѣняемой системы.

ВВЕДЕНІЕ.

Приступая къ обзору содержанія настоящаго выпуска, я считаю долгомъ исправить ошибку, вкравшуюся противъ моей воли въ предисловіе къ первому выпуску. Тамъ я указалъ на нѣсколько главъ сочиненія Мэбіуса «Lehrbuch der Statik», какъ на всю литературу статики подобно-измѣняемой системы. Но недавно я случайно познакомился съ другой работой этого автора, посвященной тому же вопросу*). Вотъ содержаніе этой небольшой статьи, состоящей изъ 6 параграфовъ, Въ первомъ авторъ, исходя изъ принципа Бернулли, находитъ слѣдующія условія равновѣсія плоской системы силъ:

$$\Sigma X=o,\ \Sigma Y=o,\ \Sigma(Yx-Xy)=o,\ \Sigma(Xx+Yy)=o.$$

---

*) Journal von Crelle, 1840, B. 21, p. 64—73.

Здѣсь x, y, координаты точки приложенія силы (X, Y).

Въ слѣдующемъ параграфѣ изъ этихъ формулъ выводятся два предложенія:

I. Если нѣсколько точекъ такъ могутъ двигаться, что фигура, составленная ими, всегда остается себѣ подобной, причемъ силы, дѣйствующія на нихъ въ плоскости, находятся въ равновѣсіи, то послѣднее не нарушится во всякомъ иномъ положеніи, которое можно дать точкамъ въ силу ихъ подвижности, если только силы остаются параллельными своимъ первоначальнымъ направленіямъ.

Обратно:

II. Если силы, дѣйствующія въ плоскости на точки, неизмѣнно связанныя между собой, находятся въ равновѣсіи, и послѣднее сохраняется, когда система точекъ произвольно перемѣщена въ своей плоскости между тѣмъ, какъ силы дѣйствуютъ параллельно ихъ первоначальнымъ направленіямъ, то равновѣсіе не нарушится, если точкамъ дадимъ возможность такого относительнаго перемѣщенія, при которомъ фигура, составленная ими, остается подобной самой себѣ. Эти два предложенія были уже изложены авторомъ въ Lehrbuch der Statik.

Въ третьемъ параграфѣ Мэбіусъ прилагаетъ общую теорію къ случаю двухъ и трехъ силъ. Въ первомъ случаѣ необходимое условіе равновѣсія заключается въ совпаденіи точекъ приложеній обѣихъ силъ, что само собой очевидно; кромѣ того, дѣйствующія силы должны быть равны по величинѣ и прямо противоположны по направленію. Для случая трехъ силъ авторъ снова *) даетъ теорему, по которой къ условіямъ равновѣсія, имѣющимъ мѣсто въ томъ случаѣ, если разстоянія точекъ приложеній силъ неизмѣняются, присоединяется еще одно, именно: три точки должны лежать на одной окружности съ общей точкой пересѣченія силъ.

---

*) Lehrbuch der Statik § 234.

Далѣе авторъ переходитъ къ системѣ силъ, дѣйствующихъ въ пространствѣ на точки подобно-измѣняемой системы. Принципъ Бернулли даетъ ему слѣдующее условіе равновѣсія:

$$1)\quad \Sigma(Xx+Yy+Zz)=o.$$

Остальныя условія:

$$2)\quad \Sigma X=o,\ \Sigma Y=o,\ \Sigma Z=o,\ \Sigma(yZ-zY)=o,\ \Sigma(zX-xZ)=o,$$
$$\Sigma(xY-yX)=o$$

авторъ получаетъ непосредственно.

Дополнительное условіе 1), характерное для подобно-измѣняемой системы, Мэбіусъ представляетъ далѣе въ видѣ:

$$3)\quad \Sigma OA.Pcs O\hat{A}P=o,$$

гдѣ OA— разстояніе любой точки O отъ точки приложенія A силы P.

Въ такомъ видѣ представленное дополнительное условіе атворъ формулируетъ слѣдующимъ образомъ: Выберемъ произвольную точку O и составимъ произведеніе изъ каждой силы P на разстояніе $OAcsO\hat{A}P$ точки приложенія силы отъ плоскости, проведенной чрезъ O перпендикулярно къ P. Сумма такихъ произведеній должна равняться нулю.

Наконецъ въ послѣднемъ параграфѣ разсматривается случай четырехъ силъ, дѣйствующихъ на 4 точки, не лежащія въ одной плоскости, и дается теорема, по которой дополнительное условіе равновѣсія въ данномъ случаѣ заключается въ томъ, что плоскости, проведенныя чрезъ точки приложеній силъ перпендикулярно къ направленіямъ послѣднихъ, должны пересѣкаться въ одной точкѣ.

Перехожу теперь къ бѣглому обзору содержанія настоящаго выпуска.

Въ первой главѣ помощью принципа Бернулли я доказываю, что пару растяженія или сжатія можно перенести на любую прямую пространства; что двѣ одноименныя пары эквивалентны, если ихъ моменты равны, и наконецъ, что только въ подобно-измѣняемой системѣ имѣетъ мѣсто предыдущая теорема, которая, слѣдовательно, можетъ считаться статическимъ опредѣленіемъ подобно-измѣняемой системы.

Этотъ результатъ я считаю весьма важнымъ. Въ слѣдующихъ главахъ было указаны главныя приложенія теоріи векторовъ, изложенной въ первыхъ двухъ выпускахъ къ статикѣ подобно-измѣняемой системы. Читатель не долженъ думать, что я ограничился простой замѣной слова «векторъ» словомъ «сила». Вездѣ, гдѣ только представлялся случай, я старался упрощать, видоизмѣнять доказательства, данныя мною раньше. Такъ во второй главѣ указаны очень простые способы преобразованія паръ (теор. VI, VII и VIII), что позволило мнѣ дать вполнѣ геометрическое доказательство теоремы Мэбіуса о равнодѣйствующей 2 силъ. Въ той же главѣ дано новое изложеніе свойствъ линейной системы силъ, основанное на геометрическомъ изображеніи момента пары растяженія. Иначе и также значительно проще изложена плоская система силъ. Но особенно внимательному пересмотру подверглась теорія винтовъ. Я ввожу, вмѣстѣ съ Балемъ, взаимные винты и пользуюсь ихъ свойствами для большей простоты изложенія. Если это и не приводитъ къ новымъ результатамъ, все же я не считаю эту работу совершенно безполезной. Дѣло въ томъ, что, по справедливому замѣчанію г. Занчевскаго*), ... «чисто геометрической теоріи винтовъ въ собственномъ смыслѣ этого слова не существуетъ». Въ указанномъ сочиненіи пробѣлъ этотъ пополняется въ томъ отношеніи, что теорія винтовъ изъ области механики цѣликомъ

*) Занчевскій. Теорія винтовъ и приложенія ея къ механикѣ. Одесса, 1889 г., стр. 16.

перенесена въ область аналитической геометріи. Въ настоящей работѣ я доказываю, что и синтетическая геометрія можетъ справиться съ этимъ вопросомъ, причемъ цѣликомъ сохраняется все изящество доказательствъ, предложенныхъ Болемъ въ его «The Theory of Screws».

Возвращаюсь къ прерванному обзору содержанія настоящаго выпуска. Въ послѣднихъ двухъ главахъ я излагаю изслѣдованія Шаля*) о возможныхъ перемѣщеніяхъ подобно-измѣняемой системы точекъ. Вывожу формулы для возможныхъ перемѣщеній послѣдней и прилагаю эти формулы къ вычисленію работы силы, пары вращенія и силоваго винта. Далѣе ввожу понятіе о кинематическомъ винтѣ въ подобно-измѣняемой системѣ. Этимъ именемъ я обозначаю совокупность вращательнаго движенія вокругъ оси винта и лучистаго растяженія вокругъ центра послѣдняго. Подъ лучистымъ растяженіемъ я разумѣю такого рода движеніе точекъ системы, при которомъ послѣднія движутся по радіусамъ, исходящимъ изъ общаго центра. Въ заключеніе вычисляется работа силоваго винта по отношенію къ кинематическому и изслѣдуется вопросъ: когда винтъ силовой не производитъ никакой работы?

Изъ этого краткаго обзора читатель, надѣюсь, выведетъ заключеніе, что вторая, новая для меня, работа Мэбіуса нисколько не отразилась на моемъ сочиненіи.

---

*) Charles. Comptes rendues. 1834, p. 1743—1759.

ГЛАВА I.

О работѣ. Принципъ Бернулли. Подобно-измѣняемая система точекъ. Основныя теоремы.

I. О работѣ силъ. Всякое безконечно-малое перемѣщеніе матеріальной точки называется возможнымъ, если оно допускается условіями, которымъ подчинено движеніе точки. Точка называется свободной, если всякое ея перемѣщеніе возможно; въ этомъ случаѣ ея движеніе не подчинено никакому условію.

Пусть AA'—возможное перемѣщеніе точки, $A\alpha$—проекція послѣдняго на направленіе силы P, дѣйствующей на точку (Ч.I.); обозначимъ $A\alpha$ чрезъ δp. Произведеніе $P\delta p$ называется работой силы P по возможному пути AA' или, короче, возможной работой силы P. Работа силы положительна, если направленія P и δp одинаковы,—отрицательна въ противномъ случаѣ.

Если δx, δy, δz — проекціи на прямоугольныхъ осяхъ координатъ возможнаго пути $AA'=\delta s$, α, β, γ—cs'ы угловъ съ осями, образуемыхъ направленіемъ P, то

$$\delta p = \alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z;$$

слѣдовательно,

$$P\delta p = P\alpha\delta x + P\beta\delta y + P\gamma\delta z.$$

Но, если X, Y, Z—слагающія по осямъ силы P, то

$$X = P\alpha,\quad Y = P\beta,\quad Z = P\gamma.$$

Внося эти значенія въ предыдущую формулу, получимъ окончательно:

$$1)\quad P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Пусть P, P',..—силы, дѣйствующія на точки A, A',... системы точекъ, δp, $\delta p'$,..—проекціи на направленія силъ одновременныхъ, возможныхъ перемѣщеній точекъ A,A',..$\Sigma P\delta p$, распространенная на всю систему, называется возможной работой силъ P, P',.. На основаніи предыдущаго,

$$2)\quad \Sigma P\delta p = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Остановимся на случаѣ двухъ точекъ.

Предположимъ, что вдоль прямой AB въ точкахъ A и B дѣйствуютъ двѣ равныя и прямо-противоположныя силы — P и $+P$ (Ч. II). Такую совокупность двухъ силъ назовемъ парой сжатія или растяженія, смотря по тому, направлены-ли силы на встрѣчу другъ къ другу или нѣтъ. (На нашемъ чертежѣ изображена пара растяженія). Силы P и—P суть слагающія пары. Вычислимъ возможную работу послѣдней.

Пусть x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 — прямоугольныя координаты точекъ A и B, ρ, α, β, γ—длина прямой AB и cs'ы угловъ, составляемыхъ ею съ осями. Тогда

$$3)\quad x_2 - x_1 = \rho\alpha,\ y_2 - y_1 = \rho\beta,\ z_2 - z_1 = \rho\gamma.$$

Если X, Y, Z — слагающія по осямъ силы P, дѣйствующей на точку B, то слагающія силы — P, дѣйствующей на A, будутъ: $-X$, $-Y$, $-Z$, причемъ

$$4)\quad X = P\alpha,\ Y = P\beta,\ Z = P\gamma.$$

Искомое выраженіе работы будетъ:

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 = X(\delta x_2 - \delta x_1) + Y(\delta y_2 - \delta y_1) + Z(\delta z_2 - \delta z_1).$$

Но формулы 3) даютъ:

$$\delta x_2 - \delta x_1 = \rho\delta\alpha + \alpha\delta\rho,\quad \delta y_2 - \delta y_1 = \rho\delta\beta + \beta\delta\rho,\quad \delta z_2 - \delta z_1 = \rho\delta\gamma + \gamma\delta\rho.$$

Умножая эти выраженія на X, Y, Z соотвѣтственно и пользуясь формулами 4), найдемъ:

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p = P\rho(\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma) + P\delta\rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Но, какъ извѣстно,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

откуда

$$\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma = o,$$

въ силу чего предыдущее выраженіе работы пары силъ приметъ слѣдующій видъ:

$$5)\quad P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 = P\delta\rho.$$

Это выраженіе чрезвычайно важно для послѣдующаго. Его нетрудно вывести геометрически*), но на этомъ я останавливаться не буду.

II. Принципъ Бернулли. Статика всякой системы точекъ заключается въ слѣдующемъ предложеніи Бернулли: Если силы, дѣйствующія на свободную систему точекъ, находятся въ равновѣсіи, то работа этихъ силъ равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія системы точекъ. Обратно, если работа силъ равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія точекъ приложеній этихъ силъ, то послѣднія находятся въ равновѣсіи.

Доказательство этого предложенія здѣсь опускается. Читатель найдетъ его въ любомъ учебникѣ аналитической механики.

Двѣ системы силъ $P, P', \ldots, Q, Q', \ldots$ считаются эквивалентными или равнодѣйствующими, если онѣ уравновѣшиваются послѣ

---

*) *Schell.* Theorie der Bewegung und der Kräfte. T. II, стр. 194.

того, какъ силы одной изъ нихъ измѣнятъ свои направленія на прямо-противоположныя *).

Пусть δp, $\delta p'$,.., δq, $\delta q'$, .. — проекціи на направленія силъ P и Q возможныхъ перемѣщеній точекъ приложеній послѣднихъ. По опредѣленію, силы (P) и (Q) эквивалентны, если системы (P) и $(-Q)$ находятся въ равновѣсіи. Но для послѣдняго, по теоремѣ Бернулли, необходимо, чтобы

$$\Sigma P\delta p - \Sigma Q\delta q = o,$$

т. е., двѣ системы силъ (P) и (Q) эквивалентны, если работы ихъ равны для всякаго возможнаго перемѣщенія точекъ ихъ приложеній.

Приложимъ эту теорему къ случаю трехъ силъ.

Положимъ, что на свободную точку (x, y, z) дѣйствуютъ силы P и Q. Если R — равнодѣйствующая сила, то, по предыдущему,

$$P\delta p + Q\delta q = R\delta z.$$

Пусть (X_1, Y_1, Z), (X_2, Y_2, Z_2), (X, Y, Z) — проекціи силъ P, Q и R на прямоугольныхъ осяхъ и координатахъ. Прилагая къ разсматриваемому случаю формулу 1), получимъ:

$$(X_1+X_2)\delta x+(Y_1+Y_2)\delta y+(Z_1+Z_2)\delta z = X\delta x+Y\delta y+Z\delta z.$$

Такъ какъ точка (x, y, z) свободна, то эта формула, по предыдущему, справедлива для безчисленнаго множества системъ значеній $(\delta x, \delta y, \delta z)$, независимыхъ между собой. Это возможно лишь въ томъ случаѣ, если

$$X = X_1 + X_2,\ Y = Y_1 + Y_2,\ Z = Z_1 + Z_2.$$

---

*) Möbius. Lehrbuch der Statik. 1837, § 6.

Полученными равенствами аналитически выражается извѣстный законъ параллелограмма, по которому складываются двѣ силы, дѣйствующія на одну и туже свободную точку x, y, z.

Предположимъ, что, вмѣсто одной точки (x, y, z), у насъ система точекъ, связи которой таковы, что всякое, безконечно-малое перемѣщеніе какой нибудь точки системы возможно. Такую систему назовемъ свободной. Точки ея удовлетворяютъ данному въ 1 § опредѣленію свободныхъ точекъ. Слѣдовательно, законъ параллелограмма имѣетъ мѣсто во всѣхъ точкахъ свободной системы.

III. О подобно-измѣняемой системѣ. Подобно-измѣняемой называется такая система, послѣдовательныя положенія которой представляютъ рядъ подобныхъ фигуръ. Слѣдовательно, при движеніи подобно-измѣняемой системы всякая фигура, составленная изъ точекъ послѣдней, остается подобной самой себѣ.

Пусть (ρ_1, ρ_2), (r_1, r_2)—длины отрѣзковъ ρ и r системы въ двухъ положеніяхъ σ_1 и σ_2 занимаемыхъ послѣдней въ моменты t_1 и t_2. Изъ опредѣленія системы вытекаетъ:

$$\frac{\rho_2}{r_2}=\frac{\rho_1}{r_1}=const.$$

Это равенство есть аналитическое опредѣленіе подобно-измѣняемой системы. Его можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}=\frac{r_2-r_1}{r_1}=E,$$

гдѣ E—постоянная величина, независящая отъ длины и положенія отрѣзка ρ. Величина E называется линейнымъ расширеніемъ системы за промежутокъ времени t_2-t_1, а отношеніе $\frac{E}{t_2-t_1}$—среднимъ коэффиціентомъ расширенія за тотъ же про-

межутокъ времени. Предѣлъ, къ которому стремится этотъ средній коэффиціентъ, когда разность $t_2 - t_1$ стремится къ нулю, называется коэффиціентомъ расширенія въ моментъ t_1. Обозначимъ его чрезъ e. Если dE—линейное расширеніе за элементъ времени dt, то, по опредѣленію,

$$dE = edt.$$

Предыдущая формула, примѣненная къ расматриваемому случаю, даетъ:

$$6)\quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{r} = edt.$$

Мы назвали выше парой сжатія или растяженія совокупность двухъ силъ P и $-P$, лежащихъ на одной прямой и отличающихся другъ отъ друга только направленіями и точками приложеній. Отрѣзокъ, концами котораго служатъ послѣднія, назовемъ плечомъ пары, причемъ условимся обозначать послѣднюю символомъ $(P, -P)$.

Теорема I. Двѣ одноименныя пары эквивалентны, если длины ихъ плечей и величины силъ одинаковы.

Здѣсь, какъ и во всемъ послѣдующемъ, подразумѣвается, что точка приложенія силы принадлежитъ подобно-измѣняемой системѣ.

Доказательство. Если ρ_1, ρ_2—плечи паръ, P—общая величина дѣйствующихъ силъ, то, по § 1, возможныя работы паръ будутъ соотвѣтственно:

$$P\delta\rho_1 \text{ и } P\delta\rho_2.$$

Но формула 6) даетъ:

$$\delta\rho_1 = e\rho_1\delta t,\quad \delta\rho_2 = e\rho_2\delta t.$$

Такъ какъ, по предположенію, ρ_1 и ρ_2 равны, то равны $\delta\rho_1$ и $\delta\rho_2$,—слѣдовательно, возможныя работы паръ также равны. А это, по § 2, служитъ доказательствомъ теоремы.

Доказанная теорема основная.

Мы вправѣ формулировать послѣднюю слѣдующимъ образомъ: въ подобно-измѣняемой системы пару расширенія или сжатія можно перенести на любую прямую пространства.

Назовемъ моментомъ пары растяженія или сжатія произведенія $\pm P.\rho$, гдѣ P—общая величина слагающихъ пары, ρ—плечо послѣдней. Верхній знакъ берется для пары растяженія; нижній—для пары сжатія.

Теорема II. Двѣ одноименныя пары эквивалентны, если ихъ моменты равны.

Доказательство. Пусть $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$—двѣ одноименныя пары, ρ и r—длины ихъ плечей. По предположенію,

$$\alpha)\quad P\rho = Qr.$$

Элементарныя работы этихъ паръ измѣряются соотвѣтственно произведеніями: $P\delta\rho$ и $Q\delta r$. Но эти произведенія равны въ силу 6) и α); слѣдовательно, теорема доказана.

Теорема III. Система точекъ, въ которой двѣ одноименныя пары эквивалентны при одномъ лишь условіи равенства ихъ моментовъ, есть подобно-измѣняемая система.

Доказательство. Пусть $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$—двѣ пары, плечи которыхъ суть ρ и r соотвѣтственно. По предположенію,

$$P\rho = Qr \text{ и } P\delta\rho = Q\delta r,$$

откуда

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta r}{r}.$$

Полученное равенство справедливо, по предположенію,

при произвольномъ положеніи отрѣзковъ r и ρ. Но, по формулѣ 6), такимъ же равенствомъ опредѣляются два безконечно-близкихъ положенія подобно-измѣняемой системы. $Q. E. D$*).

Примѣчаніе. Мы моглибы вывести теорему II изъ I, не пользуясь принципомъ Бернулли**). Но преимущество избраннаго нами пути заключается въ весьма важной теоремѣ III. Изъ нея вытекаетъ, что теорема II есть статическое опредѣленіе подобно-измѣняемой системы точекъ.

Полученныя теоремы показываютъ, что всѣ результаты теоріи векторовъ, изложенной въ первыхъ двухъ выпускахъ настоящаго труда, имѣютъ мѣсто въ статикѣ подобно-измѣняемой системы. Въ самомъ дѣлѣ, вся теорія, о которой идетъ рѣчь, была нами построена на слѣдующихъ двухъ опредѣленіяхъ***):

1. Два вектора, начала которыхъ совпадаютъ, складываются по правилу параллелограмма, причемъ сумма ихъ имѣетъ общее съ ними начало.

2. Двѣ одноименныя пары эквивалентны, если слагающіе и плеча ихъ равны. Иначе говоря, пару можно перенести на любую прямую пространства.

Этимъ двумъ опредѣленіямъ въ статикѣ подобно-измѣняемой системы соотвѣтствуютъ: правило параллелограмма двухъ силъ, приложенныхъ къ одной и той-же точкѣ, и теорема I.

---

*) *Примѣчаніе.* Интегрированіе равенства $\frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{\delta r}{r}$ далобы намъ: $\rho=Cr$, т. е., тотъ же результатъ. Авторъ.

**) Вып. I, стр. 14, теор. III.

***) Вып. I, стр. 5, § 3 и стр. 6, § 6.

ГЛАВА II.

Сложеніе силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ. Сложеніе паръ растяженій и сжатій. Линейная система силъ.

Мы будемъ пользоваться всѣми обозначеніями предыдущихъ двухъ выпусковъ.

I. *Сложеніе силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ.* Пусть O—точка приложенія силъ P, P',.. Примемъ ее за начало прямоугольныхъ координатъ x, y, z. Если X, Y, Z—слагающія по осямъ силы P, α, β, γ—cs'ы угловъ, образуемыхъ направленіемъ послѣдней съ осями координатъ, то

$$A)\quad \frac{\alpha}{X}=\frac{\beta}{Y}=\frac{\gamma}{Z}=\frac{1}{P}.$$

На основаніи второй главы перваго выпуска равенство

$$[R_0]\equiv\Sigma[P_0],$$

влечетъ за собой слѣдующія:

$$B)\quad \left\{\begin{array}{l} \Xi=\Sigma P\alpha,\ H=\Sigma P\beta,\ Z=\Sigma P\gamma, \\ \dfrac{a}{\Xi}=\dfrac{b}{H}=\dfrac{c}{Z}=\dfrac{1}{R}, \end{array}\right.$$

гдѣ a, b, c, Ξ, H и Z—cs'ы угловъ съ осями и слагающія по осямъ равнодѣйствующей силы R_0.

Формулы B) содержатъ всю теорію сложенія силъ, приложенныхъ къ одной и той же точкѣ.

II. *Сложеніе паръ сжатій или растяженій.* Какъ и въ первомъ выпускѣ, символомъ $\pm(X, a)$ будетъ обозначать пару, общая длина слагающихъ которой есть X, a—длина плеча. Верхній знакъ относится къ парѣ растяженія, нижній—къ парѣ сжатія.

Изъ теоремъ III главы перваго выпуска*) отмѣтимъ лишь слѣдующія:

Теорема IV. Совокупность паръ, имѣющихъ одно и тоже плечо, эквивалентна одной парѣ съ тѣмъ же плечомъ, общая величина слагающихъ которой есть алгебрическая сумма величинъ слагающихъ первыхъ паръ. Если знакъ каждаго члена этой суммы одинаковъ со знакомъ соотвѣтствующей пары, то знакъ равнодѣйствующей пары совпадаетъ со знакомъ суммы.

Теорема V. Совокупность любаго числа паръ эквивалентна парѣ, моментъ которой есть алгебрическая сумма моментовъ складываемыхъ паръ.

Разсмотримъ теперь различныя преобразованія паръ.

Пусть (AP, BQ), $(AP', B'Q')$—двѣ эквивалентныя пары растяженія (чер. III), по предположенію,

$$\alpha)\quad AB.AP = AB'.AP'.$$

Проведемъ прямыя BB' и PP'. Изъ α) вытекаетъ, что точки B, B', P и P' лежатъ на одной окружности. Слѣдовательно,

$$\beta)\quad \angle ABB' = \angle PP'A \text{ и } \gamma)\quad \angle AB'B = \angle APP'.$$

Полученныя равенства доказываютъ слѣдующія 2 теоремы:

Теорема VI. Если пара (AP, BQ) вращается вокругъ точки приложенія A одной слагающей AP, причемъ точка приложенія B другой описываетъ прямую BB', то конецъ P первой слагающей описываетъ дугу окружности $PP'A$. Эта дуга вмѣщаетъ уголъ, равный $\angle ABB'$.

Теорема VII. Если пара (AP, BQ) вращается вокругъ точки приложенія A одной слагающей AP, причемъ точка приложенія B другой описываетъ кругъ ABB', то конецъ P пер-

*) Вып. I, глава III.

вой слагающей описываетъ прямую PP'. Эта прямая образуетъ съ PA уголъ, равный $\angle AB'B$.

Примѣчаніе. Прямая BB' первой изъ этихъ теоремъ перпендикулярна, къ діаметру круга $PP'A$, проходящему чрезъ A *). Точно тоже имѣетъ мѣсто во второй теоремѣ: прямая PP' перпендикулярна къ діаметру круга ABB', проходящему чрезъ A *).

Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, мы легко сможемъ превратить данную пару (AP, BQ) въ другую, ей эквивалентную. Пусть MAN—прямая, на которой должна лежать вторая пара. Дана слагающая AP' послѣдней, нужно найти второй конецъ B' ея плеча. Для этого проводимъ кругъ чрезъ A, P и P'. Прямая BB', перпендикулярная къ діаметру, проходящему чрезъ A, встрѣтимъ MN въ искомой точкѣ. Если дана точка B' и нужно найти конецъ P' слагающей новой пары, то проводимъ кругъ чрезъ A, B и B'. Прямая PP', перпендикулярная къ діаметру, проходящему чрезъ A, встрѣтитъ MN въ искомой точкѣ.

Теорема VII есть слѣдствіе слѣдующей:

Теорема VIII. Если пара (AP, BQ) вращается вокругъ точки приложенія A одной своей слагающей AP, причемъ точка приложенія B второй описываетъ кругъ β, не проходящій чрезъ A, то конецъ P первой слагающей описываетъ кругъ α Центры круговъ α и β лежатъ на одной прямой съ точкой A *).

Въ послѣднихъ трехъ теоремахъ, очевидно, подразумѣвается, что пара, перемѣщаясь и измѣняя длину плеча и величину слагающихъ силъ, остается эквивалентной самой себѣ.

Послѣдняя теорема даетъ болѣе общее преобразованіе одной пары въ другую, ей эквивалентную; но мы на этомъ останавливаться не будемъ.

III. Линейная система силъ. Въ четвертой главѣ перваго выпуска **) мы изслѣдовали систему векторовъ, лежащихъ

---

*) Ср. Приложеніе II къ первому выпуску.

**) Ср. Вып. I, стр. 15--22.

на прямой; слѣдовательно, свойства линейной системы силъ, приложенныхъ къ точкамъ подобно-измѣняемой системы, намъ извѣстны. Здѣсь мы дадимъ иное изложеніе этихъ свойствъ, основанное на геометрическомъ изображеніи момента пары.

Намъ придется разсматривать треугольники, имѣющіе общую вершину O. Пусть OAB одинъ такой треугольникъ. Условимся, вмѣстѣ съ Мэбіусомъ *), считать положительной площадь этого треугольника, если направленіе $\overrightarrow{OAB}$ совпадаетъ съ направленіемъ движенія часовой стрѣлки,—отрицательной въ противномъ случаѣ.

Пусть теперь AB—сила, C—какая-нибудь точка прямой AB (ч. 4). Приложимъ въ C вдоль прямой AB двѣ равныя и прямо-противоположныя силы CB' и CB'', общая величина которыхъ равна AB. Введенная совокупность эквивалентна нулю; слѣдовательно, вмѣсто силы AB, мы получили эквивалентную ей совокупность пары (CB'', AB) и силы CB'. Итакъ *переносъ силы AB въ какую-нибудь точку C прямой, содержащей силу, сопровождается появленіемъ пары (BC'',AB)*. Моментъ послѣдней назовемъ растяженіемъ силы AB въ точкѣ C. Сказанное даетъ намъ теорему:

Теорема IX. Растяженіе силы AB въ какой-нибудь точкѣ C ея прямой представляется парой, имѣющей плечо AC, а одной изъ слагающихъ силу AB.

Слѣдствіе. Растяженія силы AB въ точкахъ C ея прямой пропорціональны разстояніямъ AC.

Теорема IX и слѣдствіе лишь по формѣ отличаются отъ теоремы V перваговыпуска.

Примѣчаніе. Если направленія AB и AC совпадаютъ, то въ точкѣ C, вмѣсто растяженія, получимъ сжатіе (ч. 4,а). Мы будемъ называть это сжатіе отрицательнымъ растяженіемъ. Моментъ сжатія силы AB въ C есть произведеніе $\pm AC.AB$. Этотъ моментъ можно геометрически представить слѣдующимъ

*) Möbius. Lehrbuch der Statik. I. Th. S. 51.

образомъ. Повернемъ отрѣзокъ AB на прямой уголъ въ сторону движенія часовой стрѣлки (ч. 4 и 4а). Пусть новое его положеніе будетъ AB'. На основаніи сдѣланнаго выше условія моментъ растяженія въ C представляется по величинѣ и знаку удвоенной площадью треугольника CAB'.

Пусть теперь AB, CD, EF,.. линейная система силъ, дѣйствующихъ вдоль прямой m, O—какая-нибудь точка послѣдней. Перенесемъ всѣ силы системы въ O. Если для краткости обозначимъ OA, OC, OE,.... чрезъ α, γ, ε,.., то, по предыдущему,

$$[AB]\equiv[OB']+(AB,\alpha),\ [BD]\equiv[OD']+(CD,\gamma),\ [EF]\equiv$$
$$\equiv[OF']+(EF,\varepsilon),\ldots.$$

откуда

$$1)\quad \Sigma]AB]\equiv\Sigma[OB']+\Sigma(AB,\alpha).$$

Силы OB', приложенныя къ одной и той же точкѣ O, можно сложить. Такъ какъ эти силы дѣйствуютъ вдоль прямой α, то эквивалентная имъ OR дѣйствуетъ на O вдоль той же прямой и имѣетъ величину, равную алгебрической суммѣ величинъ силъ OB'. Итакъ

$$2)\quad \Sigma[OB']\equiv[OR] \text{ и } \Sigma OB'=OR.$$

Займемся теперь суммой $\Sigma(AB,\alpha)$. Проведемъ какую-нибудь плоскость чрезъ прямую m и въ этой плоскости повернемъ каждую силу системы вокругъ точки ея приложенія на прямой уголъ въ сторону движенія часовой стрѣлки (черт. 5). Если AB'', CD'', EF'',.... — новыя положенія силъ AB, CD,.. системы, M_0—моментъ растяженія системы силъ въ O, то, по предыдущему,

$$\frac{M_0}{2}=\Sigma OAB''.$$

Пусть теперь O' — другая точка прямой m, $M_{0'}$ — моментъ растяженія въ O', $O'R'$ — равнодѣйствующая силъ системы, перенесенныхъ въ O'. Тогда

$$\frac{M_0'}{2}=\Sigma O'AB'' \quad \text{и} \quad O'R=OR.$$

Но очевидно,

$$O'AB''=OAB''+O'OB'';$$

слѣдовательно,

$$3) \quad \frac{M_0'-M_0}{2}=\Sigma O'OB''.$$

Повернемъ силы OB', OD',.., вмѣстѣ съ ихъ равнодѣйствующей OR, вокругъ O на прямой уголъ въ сторону движенія часовой стрѣлки. Пусть OB''', OD''',.. OR'' — новыя положенія этихъ силъ. Очевидно,

$$O'OB''=O'OB''' \quad \text{и} \quad \Sigma O'OB''=\Sigma O'OB''',$$

откуда

$$\frac{M_0'-M_0}{2}=\Sigma O'OB'''.$$

Треугольники $O'OB'''$ имѣютъ общее основаніе $O'O$; высотами ихъ служатъ прямыя OB''', OD''',.. Въ силу равенства длинъ OB' и OB''', мы на основаніи второй изъ формулъ 2) заключаемъ:

$$4) \quad M_0'=M_0+2O'OR''.$$

Положимъ теперь, что точка O' перемѣщается по прямой m. Въ правой части формулы 4) членъ M_0 есть величина постоянная, представляющая растяженіе въ точкѣ O. Второй членъ $2OO'R''$ той же части измѣняется пропорціонально разстоянію OO'. Этотъ членъ обращается въ нуль, когда O' совпадаетъ съ O, и мѣняетъ знакъ при переходѣ O' чрезъ O. Отсюда мы

заключаемъ, что, если равнодѣйствующая $O'R'$ не равна нулю, то на прямой m находится такая точка O', въ которой растяженіе системы силъ равно нулю. Эту точку мы назвали *) *центральной точкой*. Очевидно, что, если O' — центральная точка, то линейная система силъ эквивалентна одной силѣ $O'R'$.

Центральная точка опредѣляется изъ условія:

$$M_0 + 2OO'R'' = o.$$

Но

$$2OO'R'' = \pm OO'.OR'' = \pm OO'.R,$$

откуда

$$5) \quad OO' = \pm \frac{M_0}{OR}.$$

Допустимъ, что O—центральная точка. Тогда формула 4) приметъ видъ:

$$6) \quad M_0' = 2OO'R'' = \pm OO'.OR$$

т. е. *M_0' измѣняется пропорціонально растяженію точки O' отъ центральной точки.*

Если равнодѣйствующая OR равна нулю, то формула 4) даетъ:

$$M_0' = M_0,$$

т. е., въ разсматриваемомъ случаѣ во всѣхъ точкахъ прямой m растяженія системы одинаковы.

Мы получили такимъ образомъ снова всѣ свойства линейной системы силъ.

---

*) Вып. I, стр. 18—22.

ГЛАВА III.

Сложеніе силъ, направленія которыхъ пересѣкаются. Сложеніе параллельныхъ силъ. Пара Пуансо. Пара вращенія. Сложеніе паръ вращенія. Вращенія и растяженія силъ въ различныхъ точкахъ пространства.

I. Сложеніе пересѣкающихся и параллельныхъ силъ. Пара Пуансо.

*Теорема X**). Равнодѣйствующая ER двухъ силъ AB и CD, направленія которыхъ пересѣкаются въ O, представляется по величинѣ и направленію геометрической суммой линій AB и CD. Направленіе равнодѣйствующей проходитъ чрезъ O, а точка ея приложенія E лежитъ на окружности OAC.

Доказательство. Пусть AB и CD — силы, O — общая точка ихъ прямыхъ (ч. 6). Перенесемъ силы въ O. Пусть OB' и OD'—новыя положенія силъ, OB'' и OD''—силы, соотвѣтственно равныя и прямо-противоположныя силамъ AB и CD, образующія съ послѣдними двѣ пары (AB, OB'') и (CD, OD'') —растяженія данныхъ силъ въ O. Тогда

$$[AB]+[CD]\equiv[OB']+[OD']+(AB, OB'')+(CD, OD'').$$

Силы OB' и OD', приложенныя къ одной и той же точкѣ можно сложить по правилу параллелограмма. Если OR'—діагональ послѣдняго, выходящая изъ O, то

$$1)\quad [AB]+[CD]\equiv[OR']+(AB, OB'')+(CD, OD'').$$

Проведемъ кругъ чрезъ точки A, C и O. На діаметръ OO' послѣдняго опустимъ перпендикуляры $B''b$ и $D''d$ и примемъ OO' за общее плечо двухъ паръ, причемъ Ob — слагаю-

*) Möbius. Lehrbuch der Statik. § 234.

щая первой изъ нихъ, Od — слагающая второй. Тогда, по теоремѣ VII (прим.),

$$(AB,OB'')\equiv(Ob,OO'),\ (CD,OD'')\equiv(Od,OO');$$

слѣдовательно,

$$[AB]+[CD]\equiv[OR']+(Ob,OO')+(Od,OO')\equiv[OR']+$$
$$+(Ob+Od,OO'),$$

по теоремѣ IV. Откладывая на OO' отрѣзокъ $de=Ob$, получимъ окончательно:

$$2)\quad [AB]+[CD]\equiv[OR']+(Oe,OO').$$

Пусть теперь OE' — отрѣзокъ, равный и прямо-противоположный линіи OR', E — вторая точка встрѣчи послѣдней съ окружностью ACO. Линія OE', очевидно, есть геометрическая сумма линій OB'' и OD''; слѣдовательно, проекція OE' на OO' равна, по извѣстной теоремѣ, суммѣ проекцій на ту же прямую линій OB'' и OD'', т. е., по предыдущему, равна Oe. Отсюда мы заключаемъ, что уголъ $\angle E'eO$ — прямой. Принимая OE за плечо пары, слагающими которой служатъ OE' и ER, находимъ, какъ и выше:

$$(Oe,OO')\equiv(OE',ER).$$

Слѣдовательно, вмѣсто 2), получимъ

$$[AB]+[CD]\equiv[OR']+(OE',ER)\equiv[OR']+[OE']+[ER]\equiv[ER],$$

такъ какъ равныя и прямо-противоположныя силы OR' и OE', приложенныя къ одной и той же точкѣ O, взаимно-уничтожаются.

Полученное равенство доказываетъ теорему.

Слѣдствіе. Точка приложенія равнодѣйствующей ER дѣ-

лить дугу AC такъ, что хорды AE и EC обратно пропорціональны величинамъ слагающихъ силъ.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{AE}{EC}=\frac{snAOE}{snEOC}. \text{ (ч. 6)}$$

Но параллелограммъ $OB'R'D'$, въ которомъ

$$OB'=AB \text{ и } OD'=CD,$$

даетъ:

$$\frac{snAOE}{snEOC}=\frac{OD'}{OB'}=\frac{CD}{AB};$$

слѣдовательно,

$$\frac{AE}{EC}=\frac{CD}{AB}. \quad Q. E. D.$$

Теорема XI. Если двѣ силы AB и CD, направленія которыхъ пересѣкаются, повернутся въ плоскости (AB, CD) вокругъ своихъ точекъ приложеній въ одну и ту же сторону на одинъ и тотъ же уголъ α, не измѣняя своихъ величинъ, то ихъ равнодѣйствующая повернется въ той же плоскости, не измѣняя своей величины, въ ту же сторону и на тотъ же уголъ α.

Доказательство. Пусть AB, CD—силы, направленія которыхъ пересѣкаются въ O, ER—ихъ равнодѣйствующая (ч. 7). Если AB', CD', $E'R'$—новыя положенія силъ, O'—точка ихъ пересѣченія, то, по предположенію,

$$\angle BAB'=\angle DAD'.$$

Но

$$\angle BAB'=\angle OAO' \text{ и } \angle DAD'=\angle OCO',$$

слѣдовательно,

$$\angle OAO'=\angle OCO',$$

т. е., точки A, C, O и O' лежатъ на одной окружности, откуда

$$\angle AOC = \angle AO'C.$$

Отсюда и изъ того, что величины силъ не измѣнялись, мы заключаемъ, что величина новой равнодѣйствующей $E'R'$ равна величинѣ ER. Далѣе сила $E'R'$ должна пройти чрезъ точку O', причемъ начало E' лежитъ на AC такъ, что

$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{CD'}{AB'} = \frac{CD}{AB} = \frac{AE}{CE},$$

по слѣдствію предыдущей теоремы. Изъ послѣдняго равенства мы заключаемъ, что E' совпадаетъ съ E. Затѣмъ изъ чертежа получаемъ:

$$\angle RER' = \angle OEO' = \angle OAO' = \angle OCO'.$$

Итакъ равнодѣйствующая ER, дѣйствительно, повернулась, не измѣняя своей величины, вокругъ своей точки приложенія въ одну и ту же сторону съ слагающими на одинъ уголъ съ послѣдними.

Примѣчаніе. Любопытно, что эта теорема имѣетъ свое толкованіе въ астатикѣ плоской неизмѣняемой системы*). Замѣчу вообще, что всѣ результаты нашихъ изслѣдованій могутъ быть приложены къ астатикѣ твердаго тѣла.

Теорема XII. Равнодѣйствующая ER двухъ параллельныхъ силъ AB и CD параллельна слагающимъ и приложена въ точкѣ E прямой AC. Если AB и CD направлены въ одну сторону, то ER направлена въ туже сторону, величина ея равна суммѣ величинъ слагающихъ, а точка E лежитъ между A и C такъ, что

$$\frac{AE}{EC} = \frac{CD}{AB}.$$

---

*) Ср. Möbius, loc. cit. § 115.

Если AB и CD направлены въ противоположныя стороны, то сила ER направлена въ сторону большей силы, величина ея равна разности величинъ слагающихъ, причемъ точка E лежитъ на продолженіи отрѣзка AC, ближе къ большей силѣ, такъ, что

$$\frac{AE}{EC}=\frac{CD}{AB}.$$

Эта теорема есть слѣдствіе теоремы X *).

Въ случаѣ равныхъ, параллельныхъ и противо-положныхъ силъ AB и CD равнодѣйствующая ER равна нулю, а точка E лежитъ въ безконечности. Итакъ *совокупность двухъ равныхъ и параллельныхъ силъ, не лежащихъ на одной прямой и имѣющихъ противо-положныя направленія, не можетъ быть замѣнена одной силой*. Такую совокупность, какъ и въ первомъ выпускѣ, я назову *парой Пуансо*.

II. Сложеніе паръ вращенія. Пусть AB и CD — двѣ силы, равныя, параллельныя и прямо-противоположныя, причемъ прямая AC перпендикулярна къ общему направленію силъ AB и CD. Эту частную форму пары Пуансо я назову *парой вращенія*. Полное опредѣленіе и теорія этихъ паръ даны въ шестой главѣ перваго выпуска **). Такъ, разстояніе $AC=a$ есть плечо пары, произведеніе $AC\times AB$—моментъ пары. Кромѣ того, тамъ же было показано, какъ опредѣляется *сторона вращенія* пары. Пару вращенія будемъ обозначать символомъ $((X,a))$. Изъ теоремъ указанной главы отмѣтимъ лишь слѣдующія:

Теорема XIII. Пара Пуансо, общая величина слагающихъ которой есть X, а разстояніе послѣднихъ равно a, эквивалентна совокупности пары вращенія $((X,a))$ и пары растяженія $\pm(X,\alpha)$, гдѣ α — ортогональная проекція на общее на-

*) Ср. Вып. I; стр. 24—25.

**) Вып. I, стр. 26—37.

правленіе слагающихъ пары Пуансо разстоянія ихъ началъ. Эта теорема сводитъ изученіе пары Пуансо къ изученію пары вращенія.

Теорема XIV. Двѣ пары вращенія эквивалентны, если ихъ моменты геометрически равны.

Теорема XV. Совокупность двухъ паръ вращенія эквивалентна одной парѣ вращенія, моментъ которой есть геометрическая сумма моментовъ складываемыхъ паръ.

Наконецъ, если $G_1, G_2, \ldots$ — моменты данныхъ паръ, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \ldots$ — cs'ы угловъ, образуемыхъ съ осями прямо-угольныхъ координатъ x, y, z прямыми $G_1, G_2, \ldots$, $(G_1^x, G_1^y, G_1^z), \ldots$ —слагающія по осямъ послѣднихъ, то

$$\frac{\alpha_i}{G_i^x}=\frac{\beta_i}{G_i^y}=\frac{\gamma_i}{G_i^z}=\frac{1}{G_i}.$$

Пусть G_x, G_y и G_z, a, b, c — слагающіе по осямъ и cs'ы угловъ съ послѣдними момента G равнодѣйствующей пары, то

$$A)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{G_x}=\frac{b}{G_y}=\frac{c}{G_z}=\frac{1}{G} \\ &G_x=\Sigma G_i\alpha_i,\ G_y=\Sigma G_i\beta_i,\ G_z=\Sigma G_i\gamma_i. \end{aligned}\right.$$

Эти формулы содержатъ всю теорію паръ вращенія.

III. Вращенія и растяженія силы, пары растяженія и пары вращенія въ различныхъ точкахъ пространства. Предыдущія изслѣдованія привели насъ къ новому сочетанію двухъ силъ, къ парѣ вращенія. Сила, пара растяженія и пара вращенія — вотъ три элемента, къ которымъ, какъ мы увидимъ дальше, приводится всякая система силъ, дѣйствующихъ на точки подобно-измѣняемой системы. Докажемъ теперь, что эти элементы не приводимы другъ къ другу, причемъ замѣтимъ

разъ на всегда, что система точекъ, къ которой относятся наши изслѣдованія, свободна.

Прежде всего, очевидно, что *сила* P, *приложенная къ точкѣ* O, *только тогда эквивалентна нулю, если величина силы равна нулю.*

Итакъ, если

$$P_0 \equiv o,$$

то

$$P = o.$$

Пусть теперь P_0 и Q_0—двѣ эквивалентныя силы, приложенныя къ одной и той же точкѣ O. По предположенію,

$$1) \quad P_0 \equiv Q_0.$$

Разложимъ P_0 по правилу параллелограмма на двѣ силы Q'_0 и P'_0, изъ которыхъ первая совпадаетъ съ Q_0 по величинѣ и направленію. Тогда

$$Q'_0 + P'_0 \equiv Q_0,$$

откуда

$$P'_0 \equiv o \text{ и } P' = o,$$

на основаніи предыдущаго. Отсюда мы заключаемъ, что *двѣ силы, приложенныя къ одной и той же точкѣ, только тогда эквивалентны, если величины и направленія силъ одинаковы.*

Разсмотримъ теперь эквиваленцію:

$$P_0 + (AB, CD) \equiv o$$

Пару растяженія (AB, CD) можно замѣтить эквивалентной парой, слагающія которой были-бы равны по величинѣ силѣ P_0. Пусть это новая пара будетъ (ab, cd). Перенесемъ послѣднюю такъ, чтобы точка приложенія a ея слагающей ab совпала съ O, а сама слагающая ab оказалась прямо-противо-

положной силѣ P_0. Тогда написанная выше эквиваленція обратится въ слѣдующую

$$P_0+ab+cD\equiv o.$$

Но совокупность силъ P_0 и ab, приложенныхъ къ одной и той же точкѣ O, имѣющихъ равныя величины и прямо-противоположныя направленія, эквивалентна нулю; слѣдовательно,

$$CD\equiv o \text{ и } CD=o.$$

Итакъ *эквиваленція*:

$$P_0+(AB,CD)\equiv o,$$

влечетъ за собой слѣдующія двѣ:

$$P_0\equiv o, \ (AB,CD)\equiv o.$$

Отсюда мы заключаемъ, что *сила* P_0 *и пара* (AB,CD) *не могутъ быть эквивалентны*. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$(AB,CD)\equiv P_0,$$

то, введя силу P'_0, равную по величинѣ и прямо-противоположную силѣ P, получимъ:

$$(AB,CD)+P'_0\equiv P_0+P'_0\equiv o,$$

что на основаніи предыдущаго даетъ:

$$P'=P=o, \ (AB,CD)\equiv o.$$

Мы видѣли выше, что пара Пуансо не можетъ быть замѣнена одной силой. Такъ какъ пара вращенія есть лишь частная форма пары Пуансо, то, слѣдовательно, *пара вращенія*

$((X,a))$ *и сила* P_0 *не могутъ быть эквивалентны другъ другу.* Отсюда, какъ и выше, заключаемъ, что *эквиваленція*:

$$P_0+((X,a))\equiv o,$$

влечетъ за собой:

$$P_0=o,\ ((X,a))\equiv o.$$

Намъ остается разсмотрѣть эквиваленцію:

$$(X,a)+((Y,b))\equiv o.$$

Эта эквиваленція не возможна, если моменты обѣихъ паръ не равны отдѣльно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, совокупность (X,a) и $((Y,b))$ эквивалентна, по теоремѣ XIII, парѣ Пуансо, которая не эквивалентна нулю. Итакъ *эквиваленція*:

$$(X,a)+((Y,b))\equiv o,$$

влечетъ за собой:

$$(X,a)\equiv o,\ ((Y,b))\equiv o.$$

Разсмотримъ наконецъ эквиваленцію:

$$P_0+(X,a)+((Y,b))\equiv o.$$

Совокупность P_0 и (X,a) эквивалентна силѣ P, перенесенной въ нѣкоторую точку O' прямой, вдоль которой дѣйствуетъ сила P_0. Итакъ

$$P_0+(X,a)\equiv P_{o'};$$

слѣдовательно, вмѣсто предыдущей эквиваленціи, получимъ:

$$P_{o'}+((Y,b))\equiv o.$$

Откуда на основаніи только что сказаннаго получимъ:

$$P_{o'}\equiv o,\ ((Y,b))\equiv o.$$

Слѣдовательно,

$$P_0+(X,a)\equiv o,$$

откуда

$$P_0\equiv o,\ (X,a)\equiv o.$$

Итакъ *эквиваленція*:

$$P_0+(X,a)+((Y,b))\equiv o,$$

даетъ:

$$P_0\equiv o,\ (X,a)\equiv o\ \text{и}\ ((Y,b))\equiv o.$$

Отсюда, очевидно, вытекаетъ, что эквиваленція:

$$P_0+(X,a)+((Y,b))\equiv P'_0+(X',a')+((Y',b'))$$

влечетъ за собой:

$$P_0\equiv P'_0,\ (X,a)\equiv(X',a)\ \text{и}\ ((Y,b))\equiv((Y',b')).$$

Пусть теперь P_A — сила, O — какая-нибудь точка пространства (ч. 8). Опустимъ изъ O перпендикуляръ Oa на направленіе силы и перенесемъ послѣднюю въ a. Тогда

$$P_A\equiv P_a+(P_a,Aa).$$

Проведемъ чрезъ O прямую, параллельную aA, и приложимъ вдоль нея двѣ равныя и прямо-противоположныя силы P'_0 и P''_0, общая величина которыхъ равна величинѣ силы P. Тогда

$$\alpha)\quad P_A\equiv P'_0+(P_A,Aa)+((P_a,Oa)).$$

Сила P'_0 есть сила P_A, перенесенная параллельно самой себѣ въ O. Мы видимъ, что такой переносъ силы P_A даетъ пары (P_A,Aa) и $((P_a,Oa))$. Моменты Π_0 и M_0 послѣднихъ имѣютъ слѣдующія выраженія:

$$\beta)\quad \Pi_0=P.Pa,\ M_0=P.Aa,$$

причемъ моментъ M_0 перпендикуляренъ къ плоскости (O,P_A),

Вышеупомянутый переносъ силы P_A въ точку O назовемъ приведеніемъ силы къ O. Точка O есть начало приведенія, сила P'_0, пары (P_A, Aa) и $((P_a, Oa))$ — элементы послѣдняго, причемъ моменты послѣднихъ назовемъ растяженіемъ и вращеніемъ силы A_A въ точкѣ O. Назовемъ плоскость перпендикулярную къ направленію силы P_A въ A, центральной плоскостью силы. Формулами α) и β) доказывается слѣдующая теорема:

Теорема XVI. Приведеніе силы P_A къ точкѣ O даетъ три элемента: силу P'_0, пару растяженія (Π_0) и пару вращенія $((M_0))$. Сила P'_0 есть сила P_A, перенесенная параллельно самой себѣ въ O. Растяженіе Π_0 пропорціонально разстоянію начала O отъ центральной плоскости силы P_A и мѣняетъ знакъ при переходѣ точки O съ одной стороны плоскости на другую. Вращеніе M_0 пропорціонально разстоянію начала O отъ прямой, содержащей силу. Моментъ M_0 перпендикуляренъ къ плоскости (O, P_A).

Слѣдствіе I. Во всѣхъ точкахъ плоскости, параллельной центральной плоскости, сила P_A вызываетъ одинаковыя растяженія. Въ точкахъ центральной плоскости это растяженіе равно нулю.

Слѣдствіе II. Во всѣхъ точкахъ прямой, параллельной направленію силы P_A, послѣдняя вызываетъ одинаковыя вращенія. Въ точкахъ прямой, содержащей силу, это вращеніе равно нулю.

Назовемъ *лучемъ* прямую, перпендикулярную къ моментамъ вращеній всѣхъ своихъ точекъ.

Теорема XVII. Всякая прямая, встрѣчающая прямую, вдоль которой дѣйствуетъ сила P, есть лучъ.

Въ самомъ дѣлѣ, моментъ вращенія въ O перпендикуляренъ къ плоскости (O, P) и, слѣдовательно, перпендикуляренъ къ прямой, проходящей чрезъ O и встрѣчающей P.

Пусть теперь (P_A, P_B)—пара растяженія. По опредѣленію,

$$(P_A, P_B) \equiv P_A + P_B.$$

Приведя каждую изъ слагающихъ къ какой-нибудь точкѣ O, получимъ:

$$P_A \equiv P'_0 + (\Pi'_0) + ((M'_0)); \quad P_B \equiv P''_0 + (\Pi''_0) + ((M''_0)),$$

гдѣ символы (Π'_0) и $((M'_0))$ обозначаютъ пары растяженія и вращенія соотвѣтственно. Отсюда находимъ:

$$P_A + P_B \equiv (P_A, P_B) \equiv P'_0 + P''_0 + (\Pi'_0) + (\Pi''_0) + ((M'_0)) + ((M''_0))$$

или

$$P'_0 + P''_0 + (\Pi'_0) + (\Pi''_0) - (P_A, P_B) + ((M'_0)) + (M''_0) \equiv o.$$

Примѣняя къ этой эквиваленціи сказанное выше, получимъ:

$$P'_0 + P''_0 \equiv o, \quad M'_0 + M''_0 \equiv o, \quad (\Pi'_0) + (\Pi''_0) \stackrel{\bullet}{\equiv} (P_A, P_B).$$

Вторая изъ этихъ формулъ показываетъ, что *пара растяженія вовсе не вызываетъ вращенія въ какой-нибудь точкѣ пространства.* Формулу третью можно формулировать слѣдующимъ образомъ: *пара растяженія вызываетъ во всякой точкѣ пространства одинаковое растяженіе, моментъ котораго равенъ моменту пары.*

Очевидно, это лишь иная формулировка теоремы I. Точно также мы докажемъ, что *пара вращенія не вызываетъ растяженія въ какой-нибудь точкѣ пространства, а лишь вращеніе, моментъ котораго геометрически одинаковъ съ моментомъ приводимой пары.*

Пусть теперь C—система силъ $P_1, P_2, \ldots P_n$. Проведемъ каждую силу къ какой-нибудь точкѣ O. Тогда, по предыдущему, получимъ:

$$P_1 \equiv P'_0 + (\Pi'_0) + ((M'_0)), \ldots P_n \equiv P^{(n)}_0 + (\Pi^{(n)}_0) + ((M^{(n)}_0)),$$

откуда

$$C \equiv \Sigma P_i \equiv \Sigma P^{(i)}_0 + \Sigma(\Pi^{(i)}) + \Sigma((M^{(i)}_0)).$$

Совокупность силъ $P_0^{(i)}$, приложенныхъ къ одной и той-же точкѣ O, можетъ быть замѣчена одной силой R_0, приложенной къ той-же точкѣ. Равнодѣйствующая R_0 аналитически опредѣляется формулами $A)$ этой главы. Геометрически величина и направленіе R_0 дается замыкающей многоугольника, стороны котораго геометрически равны силамъ системы C*). Совокупность паръ растяженій $(\Pi_0^{(i)})$ эквивалентна, какъ мы видѣли, одной парѣ (Π_0), моментъ которой Π_0 есть алгебрическая сумма слагающихъ моментовъ Π_0^i. Наконецъ $\Sigma((M_0^{(i)}))$ можетъ быть замѣнена одной парой вращенія $((M_0))$. Моментъ послѣдней M_0 аналитически опредѣляется формулами $B)$ настоящей главы. Геометрически онъ опредѣляется, какъ замыкающая многоугольника, стороны котораго геометрически равны слагающимъ моментамъ $M_0^{(i)}$.

На основаніи всего сказаннаго получаемъ:

$$C\equiv R_0+(\Pi_0)+((M_0)).$$

Такую замѣну системы C силой, парой растяженія и парой вращенія назовемъ приведеніемъ системы C къ точкѣ O. Послѣдняя — есть начало приведенія, R_0, (Π_0) и $((M_0))$ — элементы послѣдняго. Положимъ, что даны двѣ эквивалентныя системы силъ C и C'. Приведемъ каждую изъ нихъ къ какой-нибудь точкѣ O. Если R_0, (Π_0) и $((M_0))$, R_0', (Π_0') и $((M_0'))$ — соотвѣтствующіе элементы приведенія, то

$$C\equiv R_0+(\Pi_0)+((M_0)),\quad C'\equiv R_0'+(\Pi_0')+((M_0)).$$

Но, по предположенію,

$$C\equiv C',$$

слѣдовательно,

$$R_0+(\Pi_0)+((M_0))\equiv R_0'+(\Pi_0')+((M_0')).$$

---

*) Вып. I, стр. 9, глава II.

Послѣдняя эквиваленція влечетъ за собой, по предыдущему, слѣдующія:

$$R_0 \equiv R'_0,\ (\Pi_0) \equiv (\Pi'_0),\ ((M_0)) \equiv ((M'_0)),$$

что даетъ намъ теорему:

Теорема XVIII. Двѣ эквивалентныя системы силъ имѣютъ одинаковые элементы приведенія во всякомъ началѣ приведенія.

Слѣдствіе. Двѣ силы P_A и Q_B эквивалентны лишь въ томъ случаѣ, если онѣ приложены къ одной и той же точкѣ, причемъ силы должны быть геометрически равны.

Для доказательства приведемъ силу Q_B къ точкѣ A. Пусть Q_A, (Π_A) и $((M_A))$—элементы приведенія. Тогда

$$Q_B \equiv P_A \equiv Q_A + (\Pi_A) + ((M_A)),$$

откуда, по предыдущему, слѣдуетъ:

$$P_A \equiv Q_A;\ (\Pi_A) \equiv o,\ ((M_A)) \equiv o.$$

Первая изъ этихъ формулъ показываетъ, что силы P_A и Q_A одинаковы по величинѣ и направленію.

Изъ второй, въ силу β), вытекаетъ, что центральныя плоскости силъ P_A и Q_B совпадаютъ. Наконецъ послѣдняя, въ силу тѣхъ-же формулъ β), доказываетъ совпаденіе прямыхъ, вдоль которыхъ дѣйствуютъ силы P_A и Q_B. *Q. E. D.*

Пусть C — система силъ, эквивалентная совокупности системъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, т. е.,

$$C \equiv \Sigma C_i.$$

Пусть $R_0^{(i)}$, $(\Pi_0^{(i)})$ и $((M_0^{(i)}))$ — элементы приведенія къ точкѣ O слагающей системы C_i, R_0, (Π_0) и $((M_0))$ —элементы приведенія къ той же точкѣ равнодѣйствующей системы C.

Предыдущая эквиваленція перейдетъ въ слѣдующую:

$$R_0+(\Pi_0)+((M_0))\equiv\Sigma R_0^{(i)}+\Sigma(\Pi_0^{(i)})+\Sigma((M_0^{(i)})).$$

Складывая силы $R_0^{(i)}$ въ одну R_0', пары растяженія (Π_0^{i}) въ одну (Π_0') и пары вращенія $((M_0^{(i)}))$ въ одну $((M_0'))$, найдемъ:

$$R_0+(\Pi_0)+(M_0)\equiv R_0'+(\Pi_0')+((M_0')),$$

откуда, какъ и выше,

$$R_0\equiv R_0',\quad (\Pi_0)\equiv(\Pi_0') \text{ и } ((M_0))\equiv((M_0')).$$

Замѣтимъ, что сила R_0' есть геометрическая сумма силъ $R_0^{(i)}$, моментъ Π_0' есть алгебрическая, а моментъ M_0' — геометрическая сумма моментовъ $M_0^{(i)}$. Послѣдними формулами доказывается слѣдующая теорема:

Теорема XIX. Моментъ растяженія въ точкѣ O равнодѣйствующей системы C равенъ алгебрической суммѣ моментовъ растяженія въ O слагающихъ системъ $C^{(i)}$. Моментъ вращенія въ O системы C равенъ геометрической суммѣ моментовъ вращенія въ той же точкѣ O слагающихъ системъ $C^{(i)}$.

Эти двѣ теоремы чрезвычайно важны для послѣдующаго.

ГЛАВА IV.

Плоская система силъ. Система силъ, лежащихъ въ пространствѣ. Винтъ.

Перейдемъ къ приложеніямъ теоремъ предыдущей главы. Но предварительно разсмотримъ частный случай сложенія силы и пары вращенія.

Теорема XX. Совокупность силы P_0 и пары вращенія $((M))$, моментъ которой перпендикуляренъ къ направленію

силы, всегда эквивалентна одной силѣ $P'_{0'}$. Силы P_0 и $P'_{0'}$ геометрически равны, причемъ плоскость $(P_0, P'_{0'})$ перпендикулярна къ моменту M, а прямая OO' перпендикулярна къ общему направленію силъ P_0 и $P'_{0'}$.

Доказательство. Пусть P_0 и $((M_0))$ — данныя сила и пара вращенія, моментъ которой M перпендикуляренъ къ направленію силы P_0. Проведемъ чрезъ послѣднюю плоскость α, перпендикулярную къ прямой M. Плоскость α параллельна, по предположенію, плоскости, въ которой лежитъ пара (M_0). Перенесемъ послѣднюю на α и здѣсь замѣнимъ эквивалентной парой (P_A, P_B), слагающія которой имѣютъ одинаковую величину съ силой P_0. Слѣдовательно, по теоремѣ XIV,

$$P.AB = M.$$

Новую пару $((P_A, P_B))$ повернемъ въ плоскости α, не измѣняя длины плеча AB и величины слагающихъ, такъ, чтобы точка приложенія слагающей P_A совпала съ O, а сама слагающая оказалась прямопротивоположной силѣ P_0. Тогда

$$P_0 + ((M_0)) \equiv P_0 + ((P_A, P_B)) \equiv P_0 + P_A + P_B,$$

причемъ, такъ какъ OA равно нулю, то

$$AB = OB.$$

Но равныя и прямопротивоположныя силы P_0 и P_A приложены теперь къ одной и той же точкѣ; слѣдовательно,

$$P_0 + P_A \equiv o \text{ и } P_0 + ((M_0)) \equiv P_B,$$

причемъ OB перпендикулярно къ P_A. Q. E. D.

Примѣчаніе. Разстояніе OB равнодѣйствующей силы P_B отъ P_A дается формулой:

$$OB = AB = \frac{M}{P}.$$

Слѣдствіе. Совокупность пары Пуансо и силы P_0, параллельной плоскости пары, эквивалентна силѣ P_0, перенесенной параллельно самой себѣ въ плоскости, параллельной плоскости пары.

Доказательство. По теоремѣ IV, пару Пуансо, лежащую въ плоскости α, можно замѣнить совокупностью пары вращенія $((M))$, плоскость которой параллельна α, и пары растяженія (Π). Но, по предположенію, плоскость α параллельна P_0; слѣдовательно, моментъ M перпендикуляренъ къ P_0. Откуда, на основаніи доказанной теоремы,

$$P_0+((M))\equiv P_{0_1},$$

гдѣ сила P_{0_1} геометрически равна силѣ P_0, причемъ плоскость (P_0, P_{0_1}) параллельна α. Слѣдовательно,

$$P_0+((M))+(\Pi)\equiv P_{0_1}+(\Pi)\equiv P_{0'},$$

гдѣ $P_{0'}$—сила, дѣйствующая вдоль прямой P_{0_1}. *Q. E. D.*

I. Плоская система силъ. Пусть C — плоская система силъ P_1, P_2,.. P_n, приложенныхъ къ точкамъ 1, 2,.. n. Для приведенія этой системы къ простѣйшему виду замѣтимъ слѣдующее. Двѣ силы P_i и P_k системы лежатъ въ одной плоскости; слѣдовательно, ихъ можно сложить, причемъ результатомъ сложенія будетъ, одна сила или пара Пуансо, которая въ частномъ случаѣ можетъ обратиться въ пару вращенія или пару растяженія. Наконецъ, если силы P_i и P_k приложены къ одной и той же точкѣ, причемъ силы эти равны и прямопротивоположны, то совокупность ихъ эквивалентна нулю. Основываясь на этомъ замѣчаніи, сложимъ силы P_1 и P_2 въ одну R_a. Если, вмѣсто R_a, получимъ пару Пуансо или ея частные виды, то, по слѣдствію доказанной только что теоремы, вмѣсто совокупности пары Пуансо и силы P_3, получимъ одну силу R'_b. Продолжая точно также, пока не исчерпаемъ всѣхъ силъ системы, мы, очевидно, приведемъ систему C или къ одной силѣ R_0,

или къ парѣ Пуансо. Въ частномъ случаѣ, послѣдняя можетъ оказаться парой вращенія, парой растяженія или даже эквивалентной нулю, если точки приложеній ея слагающихъ совпадутъ въ одну.

Замѣтимъ, что приведеніе системы C не зависитъ отъ порядка, въ которомъ складывались силы системы. Это прямо вытекаетъ изъ результатовъ предыдущей главы.

Разберемъ теперь отдѣльно указанные частные случаи.

А. Случай, когда система эквивалентна одной силѣ R_0. Назовемъ точку O центральной точкой системы C. Величина силы R_0 дается геометрической суммой силъ P. Это слѣдуетъ изъ доказательства теоремы XIX. Прилагая къ разсматриваемому случаю эту теорему, а также теорему XVI, получаемъ:

Теорема XXI. Если геометрическая сумма силъ плоской системы не равна нулю, то система эквивалентна одной силѣ R_0, приложенной къ центральной точкѣ системы. Въ этомъ случаѣ, растяженія системы одинаковы во всѣхъ точкахъ прямой ν, лежащей въ плоскости системы и перпендикулярной къ силѣ R_0. Растяженія системы равны нулю въ точкахъ прямой ν_0 пересѣченія плоскости системы съ центральной плоскостью силы R_0. Вращенія системы одинаковы во всѣхъ точкахъ прямой μ, лежащей въ плоскости системы и параллельной силѣ R_0. Эти вращенія равны нулю въ точкахъ прямой μ_0, вдоль которой дѣйствуетъ R_0. Въ центральной точкѣ O вращеніе и растяженіе системы одновременно равны нулю.

Мы получили такимъ образомъ теоремы XVI и XVII перваго выпуска. Тамъ прямыя μ_0 и ν_0 были названы нулевыми прямыми.

В. Случай, когда система эквивалентна парѣ Пуансо. Замѣчая, что пара Пуансо распадается на пару вращенія и пару вращенія, мы въ силу той же теоремы XIX получаемъ:

Теорема XXII. Если плоская система силъ эквивалентна парѣ Пуансо, то растяженія и вращенія системы силъ одинаковы во всѣхъ точкахъ плоскости системы.

Примѣчаніе. Въ частномъ случаѣ, если, вмѣсто пары Пуансо, получимъ пару вращенія, то во всѣхъ точкахъ плоскости системы растяженія равны нулю; если пара Пуансо обращается въ пару растяженія, то равны нулю вращенія.

Нами было показано*), какъ по вращеніямъ и растяженіямъ въ трехъ точкахъ судить о томъ, чему эквивалентна система силъ. Равнымъ образомъ, было дано**) построеніе центральной точки и нулевыхъ прямыхъ. Отсылая читателя къ указаннымъ мѣстамъ перваго выпуска, приведемъ здѣсь лишь формулы, въ которыхъ заключается вся аналитическая теорія плоской системы силъ***).

Пусть Ox, Oy — прямоугольная система координатъ, лежащая въ одной плоскости съ системой силъ. Если A и B— слагающія по осямъ равнодѣйствующей силы R, образующей съ осями уголъ a, x_0, y_0— координаты центральной точки, то, полагая:

$$M_0=\Sigma(Xx+Yy),\ G_0=\Sigma(xY-yX),$$

найдемъ:

$$x_0=\frac{AM_0+BG_0}{A^2+B^2},\quad y_0=\frac{BM_0-AG_0}{A^2+B^2},$$

причемъ

$$A=\Sigma X,\ B=\Sigma Y,\ R^2=A^2+B^2,\ tga=\frac{B}{A},$$

гдѣ (X, Y)—слагающія силы P, дѣйствующей на точку (x, y). Уравненія нулевыхъ прямыхъ будутъ:

$$Ax+By=M_0,\ Bx-Ay=G_0.$$

---

*) Вып. I, стр. 44.

**) Ibid. стр. 43-44.

***) Ibid. стр. 46—48, формулы β, γ, δ, ε, ζ, a и b.

Система силъ эквивалентна нулю, т. е., находится въ равновѣсіи, если

$$R=M_0=G_0=o,$$

т. е., если

$$\Sigma X=o,\ \Sigma Y=o,\ \Sigma(xX+yY)=o,\ \Sigma(xY-yX)=o.$$

Эти условія равновѣсія, какъ мы уже сказали въ введеніи, были впервые даны Мэбіусомъ въ его второй работѣ.

II. Система силъ въ пространствѣ. Пусть C—система силъ P, дѣйствующихъ въ пространствѣ на точки подобно-измѣняемой системы. Мы видѣли въ предыдущей главѣ, что

$$C\equiv R_0+(\Pi_0)+((M_0)),$$

гдѣ R_0, (Π_0) и $((M_0))$ — элементы приведенія системы C къ произвольной точкѣ O. Изъ даннаго тамъ же опредѣленія этихъ элементовъ вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема XXIII. Силы, приложенныя къ точкамъ подобноизмѣняемой системы, всегда могутъ быть замѣнены совокупностью одной силы R_0, приложенной къ произвольной точкѣ O системы, пары растяженія (Π_0) и пары вращенія $((M_0))$, моментъ которой M_0 вообще не параллеленъ направленію силы R_0. Величина и направленіе силы R_0 не зависятъ отъ выбора точки O.

Это—обобщеніе соотвѣтствующей теоремы Пуансо*).

Разложимъ $((M_0))$ на слагающія $((g_0))$ и $((g_1))$, причемъ моментъ g_0 параллеленъ направленію силы R_0, а g_1 перпендикуляренъ къ послѣдней. Эквиваленція

$$C\equiv R_0+(\Pi_0)+((M_0))$$

*) Poinsot. Eléments de Statique. 8-me éd Paris 1842, p. 77.

перейдетъ въ слѣдующую:

$$C \equiv R_0 + (\Pi_0) + ((g_0)) + ((g_1)).$$

Совокупность силъ R_0 и пары $((g_1))$ эквивалентна силѣ, пересенной параллельно самой себѣ въ нѣкоторую точку O' (теор. XX). Итакъ

$$C \equiv R_{0'} + (\Pi_0) + ((g_0)).$$

Совокупность силы $R_{0'}$ и пары (Π_0) эквивалентна силѣ, перенесенной по прямой, вдоль которой она дѣйствуетъ, въ нѣкоторую точку ω. Слѣдовательно,

$$C \equiv R_\omega + ((g_0)).$$

Замѣчая, что во всѣхъ предыдущихъ преобразованіяхъ сила R оставалась параллельной самой себѣ, мы заключаемъ:

Теорема XXIV. Силы, дѣйствующія на точки подобно-измѣняемой системы, могутъ быть замѣнены одной силой и парой вращенія, моментъ которой параллеленъ силѣ.

Это—обобщеніе соотвѣтствующей теоремы Пуансо*).

Точку ω назовемъ центральной точкой системы, прямую, вдоль которой дѣйствуетъ сила R_ω,—центральной осью.

*Теорема XXV***). Приведеніе системы къ центральной точкѣ единственно.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ существованіе двухъ центральныхъ точекъ ω и ω', причемъ R_ω и $((g))$—соотвѣтствующіе имъ элементы приведенія системы силъ C. Эквиваленціи:

$$C \equiv R_\omega + ((g)), \quad C \equiv R'_{\omega'} + ((g')),$$

даютъ:

$$R_\omega + ((g)) \equiv R'_{\omega'} + ((g')).$$

*) Poinsot. loc. cit. p. 79.

**) Вып. I, стр. 65, примѣч.

Изъ сказаннаго въ предыдущей главѣ вытекаетъ, что эта эквиваленція влечетъ за собой двѣ слѣдующихъ:

$$R_\omega \equiv R'_{\omega'}, \quad ((g)) \equiv ((g')).$$

Первая показываетъ, что точки ω и ω' совпадаютъ и что, кромѣ того, силы R_ω и $R'_{\omega'}$ одинаковы по величинѣ и направленію; изъ второй слѣдуетъ геометрическое равенство моментовъ g и g'. *Q. E. D.*

Назовемъ ***винтомъ*** совокупность силы R_ω и пары $((g))$, моментъ которой параллеленъ направленію силы. Точка ω есть ***центръ*** винта, прямая O, вдоль которой дѣйствуетъ сила R_ω,— винтовая *ось*, плоскость (ω), перпендикулярная къ O въ ω,— ***центральная*** или ***нулевая*** плоскость винта. Отношеніе $\frac{g}{R}$ момента пары къ величинѣ силы называется винтовымъ параметромъ. Назовемъ его чрезъ p. Винтъ параметра p, центръ котораго въ ω, осью служитъ прямая O, а слагающая сила есть R_ω, будемъ обозначать символомъ (R_ω, p_0).

Теорему XXIV можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Силы P, дѣйствующія на точки подобно-измѣняемой системы, могутъ быть замѣнены винтомъ, приложеннымъ къ нѣкоторой точкѣ. Слагающая сила винта равна, по величинѣ и направленію, замыкающей многоугольника, стороны котораго соотвѣтственно равны и параллельны силамъ P.

Изъ даннаго выше построенія слагающей пары винта слѣдуетъ, что моментъ этой пары геометрически равенъ ортогональной проекціи на направленіе замыкающей многоугольника момента вращенія системы силѣ въ любой точкѣ пространства. Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема XXVI *). Проекція на направленіе оси равно-

*) Вып. I, стр. 65, теор. XXVIII, сл.

дѣйствующаго винта момента вращенія системы силъ въ какой-нибудь точкѣ пространства есть величина постоянная, равная моменту слагающей пары винта.

Пусть (R_ω, p_0)—равнодѣйствующій винтъ. Найдемъ элементы приведенія послѣдняго къ какой-нибудь точкѣ a (ч. 10). Опустимъ для этого изъ a перпендикуляръ aa' на винтовую ось и перенесемъ силу R_ω въ a'. Тогда

$$R_\omega = R_{a'} + (\pi_a),$$

гдѣ (π_a) обозначаетъ пару растяженія $(R_0, \omega a')$. Чрезъ a проведемъ прямую, параллельную оси винта, и приложимъ въ a вдоль проведенной прямой двѣ равныя и прямо-противоположныя силы R'_a и R''_a, общая величина которыхъ равна величинѣ силы $R_{a'}$. Введенная пара эквивалентна нулю. Но теперь, вмѣсто одной силы $R_{a'}$, мы получили силу R'_a и пару вращенія $(R_{a'}, R''_a)$. Обозначимъ послѣднюю чрезъ $((g_1))$. На основаніи предыдущаго.

$$R_\omega = R'_a + (\pi_a) + ((g_1)).$$

Сложимъ теперь съ парой $((g_1))$ винтовую пару вращенія $((g_\omega))$, моментъ которой g дается формулой:

$$a) \quad g = pR.$$

Моменты g и g_1 обѣихъ паръ взаимно-перпендикулярны. Въ самомъ дѣлѣ, первый параллеленъ винтовой оси, а второй перпендикуляренъ къ послѣдней, какъ это слѣдуетъ изъ построенія.

Построимъ при a прямыя ag_1 и ag, геометрически равныя моментамъ складываемыхъ паръ. Діагональ aM прямоугольника $ag_1\,Mg$ будетъ моментомъ равнодѣйствующей пары $((M_a))$.

Все вышесказанное даетъ намъ:

$$(R_\omega, p_0) = R'_a + (\pi_a) + ((M_a)),$$

причемъ моментъ π_a и M_a опредѣляются формулами:

$$\beta)\quad \pi_a = R.\omega a',\quad M_a^2 = g_1^2 + g^2,\quad g_1 = R.aa'.$$

Если α—уголъ Mag, то

$$\gamma)\quad tg\alpha = \frac{g_1}{g} = \frac{aa'}{p},\quad M_a^2 = R^2(aa'^2 + p^2),$$

въ силу α) и β). Найденными формулами доказывается слѣдующія теоремы:

*Теорема XXVII**). Растяженія системы силъ, дѣйствующихъ на точки подобно-измѣняемой системы, одинаковы во всѣхъ точкахъ плоскости, параллельной центральной плоскости равнодѣйствующаго винта. Въ точкахъ центральной плоскости эти растяженія равны нулю.

*Теорема XXVIII***). Моменты вращенія геометрически одинаковы во всѣхъ точкахъ прямой, параллельной оси равнодѣйствующаго винта. Уголъ момента вращенія съ осью послѣдняго равенъ нулю лишь въ точкахъ оси и равенъ прямому въ безконечно-удаленныхъ точкахъ.

Эти теоремы—основныя. Прежде, чѣмъ перейти къ ихъ приложеніямъ, напомнимъ главные результаты аналитической теоріи интересующаго насъ вопроса***).

Пусть O — начало прямоугольныхъ координатъ x, y, z. P_A—одна изъ силъ системы C, X, Y, Z — слагающія силы P, x, y, z — координаты точки A. Если R_0, (Π_0) и $((M_0))$ — элементы приведенія системы силъ къ O, то

$$A)\quad C \equiv R_0 + (\Pi_0) + ((M_0)).$$

---

*) Вып. I, теор. XXV и XXV.

**) Ibid., стр. 68.

***) Ibid., стр. 72—80, форм. 1, 2, 2', 3, 2'' и k.

Положимъ, что A, B, C—слагающія силы R, L, M, N—пары M_0. Тогда

$$B)\left\{\begin{array}{l} A=\Sigma X,\ B=\Sigma Y,\ C=\Sigma Z,\ R^2=A^2+B^2+C^2;\\ L=\Sigma(yZ-zY),\ M=\Sigma(zX-xZ),\ N=\Sigma(xY-yX);\\ M_0^2=L^2+M^2+N^2\\ \Pi_0=\Sigma(xX+yY+zZ)=\Sigma P\rho cs(P,\rho), \end{array}\right.$$

гдѣ ρ — разстояніе точки приложенія A силы P_A отъ начала координатъ.

Уравненія центральныхъ плоскости и оси суть:

$$C)\quad Ax+By+Cz=\Pi_0,\ \frac{x-\xi}{A}=\frac{y-\eta}{B}=\frac{z-\zeta}{C},$$

гдѣ величины ξ, η, ζ опредѣляются формулами:

$$D)\quad R^2\xi=BN-CM,\ R^2\eta=CL-AN,\ R^2\zeta=AM-BL.$$

Для координатъ x_0, y_0, z_0—центральной точки ω и момента M слагающей пары равнодѣйствующаго винта будемъ имѣть:

$$E)\left\{\begin{array}{l} R^2x_0=AM_0+BN-CM,\ R^2y_0=BM_0+\\ +CL-AN,\ R^2z_0=CM_0+AM-BL,\\ MR=AL+BM+CN. \end{array}\right.$$

Изъ A) вытекаетъ, что система C эквивалентна нулю, если одновременно:

$$R_0\equiv o,\ (\Pi_0)\equiv((M_0))\equiv o,$$

что даетъ слѣдующія условія равновѣсія:

$$\Sigma X=o,\ \Sigma Y=o,\ \Sigma Z=o,\ \Sigma(yZ-zY)=o,\ \Sigma(zX-xZ)=o,$$
$$\Sigma(xY-yX)=o,$$

$$\Sigma(xX+yY+zZ)=\Sigma P\rho cs(P,\rho)=o.$$

Эти условія были впервые даны Мэбіусомъ, какъ мы уже сказали въ введеніи.

Пусть ab — какая-нибудь прямая (черт. 11), R_a, (Π_a) и $((M_a))$ — элементы приведенія системы силъ C къ точкѣ a. По опредѣленію,

$$\alpha)\quad C\equiv R_a+(\Pi_a)+((M_a)).$$

Приведемъ систему C къ точкѣ b. Для этого опустимъ перпендикуляръ bb' на R_a и перенесемъ силу R_a въ b'. Тогда

$$\beta)\quad R_a=R_{b'}+(R_a,\ ab').$$

Затѣмъ чрезъ b проведемъ прямую, параллельную направленію силы R_a, и приложимъ въ b вдоль проведенной прямой двѣ равныхъ прямо-противоположныхъ силы R'_b и R''_b, общая величина которыхъ равна величинѣ силы R_a. Введенная пара силъ эквивалентна нулю; слѣдовательно,

$$\gamma)\quad R_{b'}\equiv R_{b'}+R'_b+R''_b\equiv R'_b+((R_{b'},\ b'b)),$$

такъ какъ силы $R_{b'}$ и R''_b, очевидно, составляютъ пару вращенія. На основаніи α), β) и γ),

$$C\equiv R'_b+(\Pi_a)+(R_a,\ ab')+((M_a))+((R_{b'},\ b'b)).$$

Совокупность паръ растяженій (Π_a) и $(R_a,\ ab')$ эквивалентна одной парѣ (Π_b), моментъ которой Π_b есть алгебрическая сумма моментовъ первыхъ двухъ. Равнымъ образомъ

совокупность паръ вращенія $((M_{a\prime}))$ и $((R_{b\prime}, b'b))$ эквивалентна одной парѣ $((M_b))$, моментъ которой M_b есть геометрическая сумма моментовъ первыхъ двухъ. Итакъ

$$C \equiv R'_b + (\Pi_b) + ((M_b)).$$

Построимъ моментъ M_b. Пусть N_b—моментъ пары $((R_{b\prime}, b'b))$ и bb_1 — прямая, геометрически равная моменту M_a. Діагональ M_b параллелограмма bb_1MN есть искомый моментъ M_b.

Замѣтимъ, что моментъ N_b перпендикуляренъ къ плоскости bab' и, слѣдовательно, къ прямой ab. Отсюда мы заключаемъ, что проекція момента M_b на ab равна проекціи прямой bb_1. Но послѣдняя геометрически равна моменту M_a, откуда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема XXIX. Моменты вращенія системы силъ C въ точкахъ прямой ab имѣютъ одинаковыя проекціи на ab.

Слѣдствіе *). Прямая, перпендикулярная къ моменту вращенія одной своей точки, перпендикулярна къ моментамъ вращенія всѣхъ своихъ точекъ.

Такую прямую мы назвали *лучемъ.* Итакъ система силъ, дѣйствующихъ на точки подобно-измѣняемой формулы, опредѣляетъ комплексъ лучей—прямыхъ, перпендикулярныхъ къ моментамъ вращенія всѣхъ своихъ точекъ.

Этотъ комплексъ былъ изслѣдованъ въ I выпускѣ (гл. X). Вотъ его главныя свойства: онъ—перваго порядка, а каждый лучъ есть касательная къ винтовой линіи, лежащей на прямомъ кругломъ цилиндрѣ, осью котораго служитъ ось равнодѣйствующаго винта.

Пусть (R_ω, p_0)— винтъ, эквивалентный системѣ силъ C. Назовемъ постоянную проекцію на прямую ab моментовъ вращенія ея точекъ *относительнымъ моментомъ винта* (R_ω, p_0) *и прямой* ab.

---

*) Вып. I, теор. XXXIV.

Найдемъ величину этого относительнаго момента.

Пусть mn—кратчайшее растяженіе винтовой оси O и прямой ab (ч. 12). Моментъ M_n вращенія винта въ точкѣ n опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

Въ точкѣ n строимъ прямую P_n, геометрически равную моменту Rp винтовой пары. Затѣмъ приводимъ перпендикуляръ Q_n къ плоскости (n, O) по ту сторону послѣдней, съ которой направленіе ωR винтовой силы кажется идущимъ въ сторону движенія часовой стрѣлки. Длина Qn равна $R.mn$. Построенныя прямыя суть, по предыдущему, (стр.43) слагающія момента M_n вращенія винта въ точкѣ n. Замѣтимъ, что прямыя P_n и Q_n взаимно-перпендикулярны, причемъ первая параллельна винтовой оси. Такъ какъ mn есть общій перпендикуляръ къ прямымъ ab и O, то mn перпендикулярна, какъ къ плоскости (ab, P_n), такъ и къ плоскости (P_n и Q_n). Слѣдовательно, эти плоскости совпадаютъ. По извѣстной теоремѣ*), проекція на ab прямой M_n равна суммѣ проекцій на ab прямыхъ P_n и Q_n. Пусть α—уголъ между осью O и ab. Обозначимъ для краткости ab чрезъ (a), а относительный моментъ винта и прямой (a) чрезъ $2\eta_{oa}R$. На основаніи сказаннаго, получимъ:

$$2\eta_{oa}R = P_n cs\alpha + Q_n sn\alpha.$$

Внося въ эту формулу, вмѣсто P_n и Q_n, ихъ значенія и обозначая mn чрезъ d, найдемъ:

$$1)\quad 2\eta_{oa}R = R(pcs\alpha + dsn\alpha),$$

откуда

$$2)\quad 2\eta_{oa} = pcs\alpha + dsn\alpha.$$

Формула 1) показываетъ, что относительный моментъ пропорціоналенъ винтовой силѣ R. Величина $2\eta_{oa}$, какъ это видно

*) Salmon Fiedler. Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 1887 Th. I, S. 3.

изъ формулы 2), зависитъ лишь отъ винтоваго параметра, кратчайшаго разстоянія его оси отъ (a) и угла α между этими прямыми. $2\eta_{oa}$, очевидно, есть относительный моментъ того же винта (R_ω, p_0) и прямой (a) въ томъ случаѣ, когда винтовая сила R равна единицѣ.

Прямую (a) мы назвали лучемъ, если она перпендикулярна къ моментамъ вращеній всѣхъ своихъ точекъ. На основаніи предыдущей теоремы мы заключаемъ, что (a) будетъ лучемъ въ комплексѣ винта (R_ω, p_0), если $2\eta_{o\alpha}=o$, т. е., если

$$pcs\alpha+dsn\alpha=o,$$

откуда

$$p=-dtg\alpha\,^{*}).$$

ГЛАВА V.

Возможный коэффиціентъ двухъ винтовъ. Взаимные винты. Группы винтовъ. Винтовые координаты.

I. *О возможномъ коэффиціентѣ двухъ винтовъ.* Пусть (R_a, p_α) и (R'_b, p_β)—два данныхъ винта, d—кратчайшее разстояніе ихъ осей α и β, O — уголъ между послѣдними. Увеличимъ параметръ p_α перваго винта на величину параметра p_β втораго и возьмемъ въ этомъ предположеніи относительный моментъ $2\omega_{\alpha\beta}R$ новаго винта $(R_a, p_\alpha+p_\beta)$ и оси β втораго винта. Мы получимъ, на основаніи предыдущаго,

$$\alpha)\quad 2\omega_{\alpha\beta}R=R[(p_\alpha+p_\beta)csO+dsnO].$$

---

*) Вып. I, стр. 90, теор. XLV. Тамъ было получено: $dtg\alpha'=+p$. Но обѣ формулы вѣрны, — такъ какъ углы α и α' дополняютъ другъ друга до 180°. *Авт.*

Равнымъ образомъ, увеличимъ параметръ p_β втораго винта на величину p_α параметра перваго и возьмемъ въ этомъ предположеніи относительный моментъ $2\omega_{\beta\alpha} R'$ новаго винта $(R'_b, p_\beta + p_\alpha)$ и оси α перваго винта. Тогда получимъ:

$$\beta) \quad 2\omega_{\beta\alpha} R' = R'[(p_\alpha + p_\beta) csO + dsnO].$$

Формулы α) и β) даютъ:

$$1) \quad 2\omega_{\alpha\beta} = 2\omega_{\beta\alpha} = (p_\alpha + p_\beta) csO + sndO.$$

Мы видимъ, что $2\omega_{\alpha\beta}$ есть величина, вполнѣ симметричная относительно обоихъ винтовъ (R_a, p_α) и (R'_b, p_β). Въ силу сказаннаго въ предыдущей главѣ, $2\omega_{\alpha\beta}$ есть проекція на β момента вращенія въ какой-нибудь точкѣ прямой β, вызваннаго винтомъ параметра $p_\alpha + p_\beta$, лежащимъ на α, причемъ слагающая сила винта равна единицѣ. Равнымъ образомъ, $2\omega_{\alpha\beta}$ есть проекція на α момента вращенія въ какой-нибудь точкѣ прямой α, вызваннаго винтомъ параметра $p_\alpha + p_\beta$, лежащимъ на β, причемъ слагающая сила винта также равна единицѣ.

Вмѣстѣ съ Балемъ*), назовемъ величину $2\omega_{\alpha\beta}$ возможнымъ коэффиціентомъ винтовъ (R_a, p_α) и (R'_b, p_β); величины же $2\omega_{\alpha\beta} R$ и $2\omega_{\alpha\beta} R'$ я назову возможными относительными моментами послѣднихъ.

II. *О взаимныхъ винтахъ*. Два винта (R_a, p_α) и (R'_b, p_β) называются *взаимными*, если ихъ возможный коэффиціентъ равенъ нулю.

Два винта взаимны въ слѣдующихъ случаяхъ:

1. *Оси винтовъ параллельны или совпадаютъ.*

---

*) *Ball*. The Theory of Screws. Dublin, 1876, p. 13.
Klein назвалъ величину $2\omega_{\alpha\beta}$ *совмѣстнымъ инваріантомъ* двухъ комплексовъ.
Ср. Klein F. Math. Annalen. B. II, 1869, p. 198; ibid. p. 366.
Замѣтимъ, что этимъ авторамъ было извѣстно лишь аналитическое и механическое значеніе возможнаго коэффиціента. *Авт.*

Въ этомъ случаѣ сумма параметровъ должна равняться нулю.

2. *Оси винтовъ пересѣкаются.*

Въ этомъ случаѣ или сумма параметровъ равна нулю, или оси пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

3. *Оси винтовъ не лежатъ въ одной плоскости.*

Въ этомъ случаѣ, самомъ общемъ, условіе взаимности можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ: *два винта взаимны, если ось одного изъ нихъ есть лучъ комплекса, опредѣляемаго вторымъ винтомъ, параметръ котораго увеличенъ на параметръ перваго.*

Это прямо вытекаетъ изъ опредѣленія луча, даннаго въ предыдущей главѣ, и опредѣленія возможнаго коэффиціента двухъ винтовъ*).

Въ частномъ случаѣ, когда параметръ одного изъ двухъ взаимныхъ винтовъ равенъ нулю, ось этого винта есть лучъ комплекса, опредѣляемаго вторымъ. Обратно: лучи комплекса, опредѣляемаго даннымъ винтомъ (R_a, p_α), суть оси винтовъ нулеваго параметра, взаимныхъ съ винтомъ (R_a, p_α).

Теперь мы можемъ перейти къ изученію винтовыхъ группъ.

III. *Группы винтовъ.* Пусть (R_1, p_{α_1}), (R_2, p_{α_2}), .. (R_n, p_{α_n}) — n данныхъ винтовъ, центры которыхъ въ точкахъ $1, 2, .. n$, а осями служатъ прямыя $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_n$. Совокупность этихъ винтовъ представляетъ нѣкоторую систему силъ, дѣйствующихъ въ пространствѣ на точки подобно-измѣняемой фигуры. Мы видѣли въ предыдущей главѣ, что такая система силъ вообще эквивалентна нѣкоторому винту (ρ_ω, p_α). Итакъ

$$(\rho_\omega, p_\alpha) = \Sigma(R_i, p_{\alpha_i}).$$

*) Cp. Gravelius H. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Berlin 1889, p. 113.

Будемъ теперь мѣнять слагающія силы $R_1, R_2, \ldots$ данныхъ винтовъ, оставляя безъ измѣненія центры, оси и параметры послѣднихъ. Каждой системѣ значеній $R_1, R_2, \ldots R_n$ будетъ отвѣчать опредѣленный винтъ (ρ_ω, p_α). Совокупность всѣхъ винтовъ, полученныхъ такимъ образомъ, составляетъ группу винтовъ. Данные винты, называемые основными, входятъ въ послѣднюю, такъ какъ они отвѣчаютъ системамъ: $(R_1, o, o, \ldots)$, $(o, R_2, o, \ldots), \ldots (o, o \ldots, o, R_n)$.

Если, кромѣ этихъ, нѣтъ другихъ системъ, которыя опредѣляли бы собою какой-нибудь изъ данныхъ n винтовъ, то послѣдніе независимы между собой, а группа будетъ n порядка.

Въ дальнѣйшемъ мы постоянно будемъ предполагать, что основные винты независимы между собой.

Найдемъ связь между какимъ-нибудь винтомъ (ρ_ω, p_α) группы и основными винтами. Для этого приведемъ каждый изъ послѣднихъ къ какой-нибудь точкѣ O пространства. Если $R_0^{(i)}$, $(\Pi_0^{(i)})$ и $((M_0^{(i)}))$ — элементы приведенія основнаго винта $(R_i, p_{\alpha i})$, ρ_0, (Π_0) и $((M_0))$ — аналогичныя величины, соотвѣтствующія винту (ρ_ω, p_α), то

$$(R_i, p_{\alpha i}) \equiv R_0^{(i)} + (\Pi_0^{(i)}) + ((M_0^{(i)})),$$

$$(\rho_\omega, p_\alpha) \equiv \rho_0 + (\Pi_0) + ((M_0)).$$

Но, по предположенію,

$$(\rho_\omega, p_\alpha) \equiv \Sigma(R_i, p_{\alpha i});$$

слѣдовательно,

$$\rho_0 + (\Pi_0) + ((M_0)) \equiv \Sigma R_0^{(i)} + \Sigma(\Pi_0^i) + \Sigma((M_0^i)),$$

откуда, какъ не разъ ужъ было замѣчено,

$$\gamma) \quad \rho_0 \equiv \Sigma R_0^{(i)}, \ (\Pi_0) \equiv \Sigma(\Pi_0^{(i)}), \ ((M_0)) \equiv \Sigma(M_0^{(i)}).$$

Первая изъ этихъ формулъ показываетъ, что ρ_0 есть за-

мыкающая многоугольника A, стороны котораго геометрически равны силамъ $R^{(i)}$ основныхъ винтовъ; изъ второй слѣдуетъ, что моментъ вращенія M_0 есть замыкающая многоугольника B, стороны котораго геометрически равны моментамъ $M_0^{(i)}$.

Проведемъ чрезъ O какую-нибудь прямую m. По извѣстной теоремѣ, проекція замыкающей многоугольника на прямую m равна суммѣ проекцій сторонъ многоугольника. Примѣняя это къ нашему случаю, получаемъ теорему:

Теорема XXX. Относительный моментъ винта (ρ_ω, p_α) группы и прямой m равенъ суммѣ моментовъ основныхъ винтовъ относительно той-же прямой.

Итакъ

$$\rho.\eta_{\alpha m} = \Sigma R^{(i)} \eta_{\alpha_i m}.$$

Слѣдствіе. Лучъ, общій комплексамъ всѣхъ основныхъ винтовъ, есть лучъ каждаго винта группы.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ всѣ $\eta_{\alpha_i m}$ равны нулю, откуда

$$\eta_{\alpha m} = 0,$$

т. е., прямая m есть лучъ комплекса, опредѣляемаго винта (ρ_ω, p_α).

Увеличимъ параметръ каждаго основнаго винта на нѣкоторую величину p. Это значитъ, что къ каждому винту мы прибавили пару вращенія $((pR^{(i)}))$, моментъ которой параллеленъ и пропорціоналенъ слагающей силѣ $R^{(i)}$ винта. Слѣдовательно, слагающая пара $((p_\alpha \rho))$ равнодѣйствующаго винта (ρ_ω, p_α) увеличится на сумму $\Sigma((pR_i))$.

Представимъ себѣ многоугольникъ C, стороны котораго геометрически равны моментамъ $p.R^{(i)}$. Такъ какъ стороны этого многоугольника соотвѣтственно параллельны и пропорціональны сторонамъ многоугольника A (см. выше), то замыкающія этихъ многоугольниковъ также параллельны и находятся въ отноше-

нія сторонъ. Слѣдовательно, если μ моментъ пары вращенія, эквивалентной $\Sigma((pR_i))$, то

$$\mu = p.\rho;$$

кромѣ того, прямая μ параллельна ρ, т. е., оси α винта (ρ_ω, p_α).

Полученная формула доказываетъ слѣдующее предложеніе:

Теорема XXXI. Если параметры основныхъ винтовъ увеличатся на одну и туже величину, то параметръ равнодѣйствующаго винта увеличится на туже самую величину.

Итакъ, если

$$\Sigma(R_i, p_{\alpha_i}) \equiv (\rho_\omega, p_\alpha),$$

то

$$\Sigma(R_i, p_{\alpha_i} + p) \equiv (\rho_\omega, p_\alpha + p).$$

Пусть теперь (R_b, p_β) — какой-нибудь винтъ. Возьмемъ возможные моменты $2R^{(1)}\omega_{\alpha_1\beta}$, $2R^{(2)}\omega_{\alpha_2\beta}$, .. $2R^{(n)}\omega_{\alpha_n\beta}$ основныхъ винтовъ относительно винта (R_b, p_β). Для этого, по опредѣленію, нужно параметръ каждаго изъ основныхъ винтовъ увеличить на p_β и тогда взять моменты полученныхъ новыхъ винтовъ относительно прямой. На основаніе послѣднихъ двухъ теоремъ заключаемъ:

Теорема XXXII. Возможный моментъ винта (ρ_ω, p_α) группы относительно какого-нибудь винта (R_b, p_β) равенъ суммѣ возможныхъ моментовъ основныхъ винтовъ относительно того же винта (R_b, p_β).

Итакъ

$$2) \quad \rho\omega_{\alpha\beta} = \Sigma R^i.\omega_{\alpha_i\beta}.$$

Слѣдствіе I. Винтъ, взаимный съ каждымъ изъ основныхъ винтовъ, взаименъ съ каждымъ винтомъ группы.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ всѣ $\omega_{\alpha_i\beta}$ равны нулю, откуда

$$\omega_{\alpha\beta} = 0,$$

т. е., винты (ρ_ω, p_α) и (R_b, p_β) взаимны.

Пусть (R_m, p_μ) — какой-нибудь винтъ. Представимъ себѣ, что вдоль лучей комплекса, опредѣляемаго винтомъ, дѣйствуютъ силы P. Совокупность всѣхъ этихъ силъ эквивалентна нѣкоторому винту (ρ_ω, p_α). Каждую силу P мы можемъ разсматривать, какъ винтъ нулеваго параметра. Замѣчая, что каждый изъ послѣднихъ взаимемъ съ (R_m, p_μ), мы заключаемъ, въ силу только что доказаннаго предложенія, что и винтъ (ρ_ω, p_α) взаимемъ съ (R_m, p_μ). Итакъ мы получили теорему:

Теорема XXXIII. Совокупность силъ, дѣйствующихъ вдоль лучей комплекса винта (R_m, p_μ), эквивалентна винту, взаимному съ (R_m, p_μ).

Измѣнимъ слагающія силы $R^{(1)}, R^{(2)}, .. R^{(n)}$ основныхъ винтовъ въ одномъ и томъ же отношеніи k и разсмотримъ, что произойдетъ съ равнодѣйствующимъ винтомъ (ρ_ω, p_α). Для этого обратимся къ формуламъ γ), представляющимъ приведеніе послѣдняго къ какой-нибудь точкѣ O. Слагающая сила ρ_0 винта представляется, какъ мы видѣли, замыкающей многоугольника A, стороны котораго геометрически равны силамъ $R^{(1)}, .. R^{(n)}$. Слагающая ρ_0' новаго винта будемъ, слѣдовательно, замыкать многоугольникъ A', стороны котораго геометрически равны новымъ значеніямъ силъ $R^{(1)}, .. R^{(n)}$. Но эти новыя значенія, по предположенію, пропорціональны прежнимъ. Отсюда мы заключаемъ, что многоугольники A и A' подобны; слѣдовательно, силы ρ_0' и ρ_0 имѣютъ одинаковое направленіе, причемъ ρ_0' равна $k.\rho_0$. Далѣе, такъ какъ параметры и оси основныхъ винтовъ не измѣнялись, то слагающіе моменты $M_0^{(i)}$ измѣнятъ лишь свои длины, какъ это слѣдуетъ изъ формулъ γ) предыдущей главы (стр. 44). Кромѣ того, новыя значенія моментовъ $M_0^{(i)}$, въ силу тѣхъ же формулъ, будутъ равны прежнимъ, увеличеннымъ въ томъ же отношеніи k. Отсюда, какъ и выше, выводимъ, что новый моментъ M_0' имѣетъ съ M_0 одинаковое направленіе и равенъ $k.M_0$. Наконецъ, такъ какъ и центры основныхъ винтовъ остались тѣже, то отсюда вытекаетъ, что моменты $\Pi_0^{(i)}$ растяженій, вы-

зываемыхъ въ O основными винтами, увеличатся въ отношенiи k. Слѣдовательно, въ такомъ же отношенiи увеличится ихъ сумма $\Sigma\Pi_{\omega}^{(i)}$, равная Π_0.

Итакъ элементы приведенiя къ O новаго винта отличаются отъ соотвѣтственныхъ элементовъ приведенiя винта (ρ_ω, p_α) только тѣмъ, что первые больше вторыхъ въ k разъ. Отсюда, на основанiи формулъ γ) предыдущей главы, заключаемъ, что новый винтъ отличается отъ (ρ_ω, p_α) только тѣмъ, что его слагающая сила равна $k\rho$. Итакъ, если

$$\Sigma(R_i^{(i)}, p_{\alpha i}) \equiv (\rho_\omega, p_\alpha),$$

то

$$\Sigma(kR_i^{(i)}, p_{\alpha i}) \equiv (k\rho_\omega, p_\alpha).$$

Будемъ въ винтѣ (ρ_ω, p_α) обращать вниманiе только на его центръ, ось и параметръ. На основанiи предыдущаго можемъ сказать, что каждый винтъ группы n-*го* порядка опредѣляется $(n-1)$ произвольными величинами: отношенiями $(n-1)$ слагающихъ силъ основныхъ винтовъ къ послѣдней.

Мы видѣли, что винтъ, взаимный съ каждымъ изъ основныхъ винтовъ, взаименъ съ каждымъ винтомъ группы. Совокупность винтовъ, взаимныхъ со всѣми винтами группы n-*го* порядка, составляетъ новую группу, взаимную съ первой. Найдемъ порядокъ этой новой группы.

Для этого замѣтимъ, прежде всего, что въ опредѣленiи винта, взаимнаго съ даннымъ, центры ихъ и слагающiя силы не играютъ никакой роли. Отсюда вытекаетъ, что винтъ, взаимный съ даннымъ, опредѣляется 5-ю величинами. Изъ нихъ 4 опредѣляетъ положенiе его оси, пятая — его параметръ. Но винтъ, взаимный со всѣми винтами группы n-*го* порядка, долженъ быть взаименъ съ n основными винтами. Слѣдовательно, между пятью величинами, опредѣляющими винтъ, существуетъ n зависимостей вида: $\omega_{\alpha\beta}=o$, и только $5-n$ изъ нихъ остаются произвольными. Но порядокъ винтовой группы, какъ мы

только что видѣли, на единицу больше числа произвольныхъ величинъ, которыми можно располагать при опредѣленіи какого-нибудь винта группы. Итакъ *винты, взаимные съ данной группой n-го порядка, образуютъ группу порядка* $(6-n)$.

IV. *О винтовыхъ координатахъ**). Пусть $(R_{a_i}^{(i)}, p_{a_i})$—одинъ изъ n—независимыхъ винтовъ, (ρ_a, p_α) — какой-нибудь винтъ группы, построенной на послѣднихъ, какъ основныхъ винтовъ. Назовемъ величины $R^{(1)}$, $R^{(2)}$,.. $R^{(n)}$ — координатами винта (ρ_a, p_α), основные винты—координатными винтами. Для опредѣленія этихъ величинъ поступимъ слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ какой-либо винтъ $(\rho'_{b'}, p'_\beta)$, не входящій въ группу.

Тогда, по предыдущему,

$$\rho\omega_{\alpha\beta}=\Sigma R^{(i)}\omega_{\alpha_i\beta}.$$

Беря, вмѣсто винта (β), еще $(n-1)$ любыхъ винтовъ (β'), (β''),..., получимъ еще $(n-1)$ уравненій такого-же вида, изъ которыхъ можно будетъ опредѣлить искомыя величины $R^{(i)}$.

Вмѣсто винтовъ β, возьмемъ n основныхъ винтовъ α_i. Замѣчая, что

$$\omega_{\alpha\alpha}=p_\alpha,$$

найдемъ:

$$\rho\omega_{\alpha\alpha_1}=R^{(1)}p_{\alpha_1}+R^{(2)}\omega_{\alpha_1\alpha_2}+\ldots+R^{(n)}\omega_{\alpha_1\alpha_n}$$

$$\rho\omega_{\alpha\alpha_2}=R^{(1)}\omega_{\alpha_1\alpha_2}+R^{(2)}p_{\alpha_2}+\ldots+R^{(n)}\omega_{\alpha_2\alpha_n}$$

$$\vdots$$

$$\rho\omega_{\alpha\alpha_n}=R^{(1)}\omega_{\alpha_1\alpha_n}+R^{(2)}\omega_{\alpha_2\alpha_n}+\ldots+R^{(n)}p_{\alpha_n}$$

Наконецъ, вмѣсто β, возьмемъ винтъ α. Тогда

$$\rho p_\alpha=R^{(1)}\omega_{\alpha_1\alpha}+R^{(2)}\omega_{\alpha_2\alpha}+\ldots+R^{(n)}\omega_{\alpha_n\alpha}.$$

---

*) *Примѣчаніе.* Но независѣвшимъ отъ меня обстоятельствамъ я не могъ изложить теорію винтовыхъ координатъ въ предыдущемъ выпускѣ настоящаго труда. *Авт.*

Полученныя уравненія даютъ:

$$\rho^2 p_a = \Sigma R^{(i)2} p_{\alpha_i} + 2\Sigma R^{(i)} R^{(k)} \omega_{\alpha_i \alpha_k}.$$

Такимъ образомъ слагающая сила равнодѣйствующаго винта выражена помощью координатъ. Можно прямо найти выраженіе этой силы помощью послѣднихъ. Для этого достаточно замѣтить, что ρ есть замыкающая многоугольника, стороны котораго геометрически равны $R^{(i)}$. Слѣдовательно,

$$\rho^2 = \Sigma R^{(i)2} + 2\Sigma R^{(i)} R^{(k)} cs(\alpha_i \alpha_k).$$

Разсмотримъ частный случай. Пусть $(R^{(1)}_{a_1}, p_{\alpha_1})$, $(R^{(2)}_{a_2}, p_{\alpha_2})$,.. $(R^{(6)}_{a_6}, p_{\alpha_6})$—шесть независимыхъ винтовъ, (ρ_a, p_α)—какой-нибудь седьмой винтъ. Въ слѣдующей главѣ будетъ показано, что всегда можно такъ подобрать величины $R^{(i)}$, чтобы винтъ $(\rho_{a'}, p_\alpha)$ группы, построенной на первыхъ 6-ти винтахъ, отличался отъ (ρ_a, p_α) только центромъ. Очевидно,

$$(\rho_a, p_\alpha) \equiv (\rho_{a'}, p_\alpha) + (\pi),$$

гдѣ моментъ π пары растяженія (π) равенъ $\pm \rho . aa'$. За координаты винта (ρ_a, p_α) примемъ 6-ть величинъ $R^{(i)}$ и величину π. Для упрощенія формулъ выберемъ координатные винты слѣдующимъ образомъ. Винтъ $(R^{(1)}_{a_1}, p_{\alpha_1})$ выбираемъ произвольно, винтъ $(R^{(2)}_{a_2}, p_{\alpha_2})$ взаименъ съ первымъ, винтъ $(R^{(3)}_{a_3}, p_{\alpha_3})$ — взаименъ съ первыми двумя и т. д., наконецъ винтъ $(R^{(6)}_{a_6}, p_{\alpha_6})$— взаименъ съ первыми 5-ю. Примемъ кромѣ того, величину ρ за единицу.

Тогда, такъ какъ $\omega_{\alpha_i \alpha_k} = o$, то предыдущія формулы примутъ слѣдующій видъ:

$$R^{(1)} = \frac{\omega_{\alpha\alpha_1}}{p_{\alpha_1}},\ R^{(2)} = \frac{\omega_{\alpha\alpha_2}}{p_{\alpha_2}},\ ..\ R^{(6)} = \frac{\omega_{\alpha\alpha_6}}{p_{\alpha_6}}$$

$$p_\alpha = R^{(1)2} p_{\alpha_1} + R^{(2)2} p_{\alpha_2} + \ldots + R^{(6)2} p_{\alpha_6}.$$

$$1 = \Sigma R^{(i)2} + 2\Sigma R^{(i)} R^{(k)} cs(\alpha_i \alpha_k).$$

Что касается седьмой координаты π, то она, по предыдущему, равна растяженію, вызываемому въ a винтомъ $(\rho_{a'}, p_\alpha)$. Но, по предположенію,

$$(\rho_{a'}, p_\alpha) \equiv \Sigma(R^{(i)}_{a_i}, p_\alpha).$$

Слѣдовательно, въ силу теоремы XX,

$$\pi = \Sigma R^{(i)}.q_i;$$

гдѣ q_i — длина перпендикуляра, опущеннаго изъ a на прямую, вдоль которой дѣйствуетъ сила $R^{(i)}$, Σ — знакъ алгебрической суммы.

Мы получили координаты $R^{(i)}$ винта (ρ_α, p_α), сила котораго ρ равна единицѣ. Еще ρ не равна единицѣ, то координаты $R'^{(i)}$, въ силу равенства:

$$\Sigma(kR^{(i)}, p_{\alpha_i}) = (k\rho, p_\alpha),$$

будутъ:

$$R'^{(i)} = \rho.R^{(i)}.$$

Выразимъ помощью координатъ $R^{(i)}$ и $r^{(i)}$ двухъ винтовъ (ρ_α, p_α) и $(\rho'_{\alpha'}, p'_{\alpha'})$ ихъ возможный коэффиціентъ $2\omega_{\alpha\alpha'}$. По предыдущему,

$$\omega_{\alpha\alpha'} = \Sigma R^{(i)}\omega_{\alpha_i\alpha'}.$$

Но, какъ мы только что видѣли,

$$\omega_{\alpha'\alpha_i} = r^{(i)}p_{\alpha_i}$$

слѣдовательно,

$$\omega_{\alpha\alpha'} = \Sigma R^{(i)}r^{(i)}p_{\alpha_i}.$$

Отсюда, замѣчая, что

$$\omega_{\alpha\alpha} = p_\alpha,$$

снова получаемъ:

$$p_\alpha = \Sigma R^{(i)2}p_{\alpha_i}.$$

Изъ предыдущаго вытекаетъ, что два винта взаимны, если

$$\Sigma R^{(i)} r^{(i)} p_{\alpha_i} = o.$$

Положимъ, что координаты $R^{(i)}$ какого-нибудь винта удовлетворяютъ линейному однородному уравненію вида:

$$\Sigma A_i R^{(i)} = o.$$

Полагая:

$$r_i = \frac{A_i}{p_{\alpha_i}},$$

найдемъ:

$$\Sigma R^{(i)} r^{(i)} p_{\alpha_i} = o,$$

т. е., винты $(R^{(1)},..R^{(i)})$ и $(r^{(1)},..r^{(i)})$ взаимны между собой. Отсюда мы заключаемъ, что, если координаты винта удовлетворяютъ n линейнымъ однороднымъ уравненіямъ, то этотъ винтъ взаименъ съ n винтами и, слѣдовательно, входитъ въ группу порядка $(6-n)$.

Всѣ результаты настоящей главы были получены Балемъ*) при помощи принципа Бернулли. Аналитически они были доказаны впервые г. Занчевскимъ**).

ГЛАВА VI.

Группы винтовъ различныхъ порядковъ.

Здѣсь мы сдѣлаемъ бѣлый обзоръ винтовыхъ группъ, пользуясь свойствами взаимныхъ винтовъ***).

---

*) Ball. The Theory of Screws. Dublin, 1876. Ch. IV и p. 40, 43 и 85. Cp. Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Berlin, 1889. Kap. V. § 2—12.

**) Занчевскій. *Теорія винтовъ.* Одесса, 1889 г. Глава II, § 39, 41, 42.

***) Ball. l. cit. Ch. IX, § 79, Ch. II, § 16—21, Ch. X, § 86.

Группы винтовъ перваго и пятаго порядка. Пусть (R_a, p_α) — основный винтъ. Всѣ винты группы получатся, по опредѣленію, если мы будемъ мѣнять величину R. Отсюда мы заключаемъ слѣдующую теорему:

Теорема XXXIV. Винты группы перваго порядка отличаются другъ отъ друга только величиной слагающихъ силъ.

Группа C, взаимная съ группой перваго порядка, будетъ 5-го порядка, по сказанному въ предыдущей главѣ. Она состоитъ изъ винтовъ, взаимныхъ съ однимъ винтомъ (R_a, p_α). Легко прослѣдить распредѣленіе въ пространствѣ винтовъ группы C, если мы вспомнимъ, что ось винта параметра π, взаимнаго съ (R_a, p_α), есть лучъ комплекса, опредѣленнаго винтомъ $(R_a, (p+\pi)_\alpha)$. Это даетъ намъ теорему:

Теорема XXXV. Оси винтовъ одинаковаго параметра π, взаимныхъ съ группой A перваго порядка, образуютъ комплексъ перваго порядка, центральная ось котораго совпадаетъ съ общей осью всѣхъ винтовъ группы A. Параметръ комплекса равенъ $p+\pi$, гдѣ p—общій параметръ винтовъ группы A.

Пусть m — какая-нибудь точка, M_m — моментъ вращенія, вызываемаго въ m винтомъ $(R_a, (p+\pi))$. Проходящіе чрезъ m лучи комплекса, опредѣляемаго послѣднимъ, лежатъ въ плоскости, перпендикулярной въ m къ прямой M_m *). Кромѣ того, замѣтимъ, что всякій винтъ, лежащій на перпендикулярѣ $m\mu$, опущенномъ изъ m на ось винта (R_a, p_α), взаименъ съ послѣднимъ. Отсюда на основаніи предыдущаго заключаемъ:

Теорема XXXVI. Винты равнаго параметра π, проходящіе чрезъ точку m и взаимные съ винтомъ (R_a, p_α), лежатъ въ одной и той же плоскости (m). Плоскости m, соотвѣтствующія различнымъ параметрамъ π, образуютъ пучокъ, осью котораго служитъ перпендикуляръ $m\mu$, опущенный изъ точки m на ось a винта (R_a, p_α).

---

*) Вып. I, стр. 84 и стр. 86, теор. XXXIV, слѣдствіе.

Пусть (m)—какая-нибудь плоскость, m—полюсъ послѣдней въ комплексѣ, опредѣляемомъ винтомъ $(R_a, (p+\pi)_\alpha)$. Чрезъ m проходятъ всѣ лучи, лежащіе въ (m), причемъ прямая, соединяющая m съ точкой, въ которой ось α встрѣчаетъ (m), перпендикулярна къ α*). Это даетъ намъ теорему:

Теорема XXXVII. Винты равнаго параметра π, лежащіе въ плоскости (m) и взаимные съ винтомъ (R_a, p_α), проходятъ чрезъ одну и ту же точку m. Точки m, соотвѣтствующія различнымъ параметрамъ π, лежатъ на прямой, встрѣчающей ось α подъ прямымъ угломъ**).

Мы получили, слѣдовательно, снова всѣ свойства винтовъ группы пятаго порядка. (Ср. выпускъ II, гл. VIII).

Группы 2-го и 4-го порядка. Группа винтовъ втораго порядка была изслѣдована во второмъ выпускѣ настоящаго труда (стр. 20—36). Напомнимъ ея главныя свойства.

I. Оси винтовъ группы встрѣчаютъ подъ прямымъ угломъ одну и ту же прямую A, называемую *директрисой.*

II. Чрезъ каждую точку a директрисы проходятъ вообще два различныхъ винта группы: Эти винты совпадаютъ въ двухъ точкахъ α и α' директрисы. Два винта, проходящіе чрезъ средину O отрѣзка $\alpha\alpha'$, взаимно перпендикулярны. Эти винты называются главными, ихъ параметры p_1 и p_2—главными параметрами.

Точка O—центръ группы.

III. Оси винтовъ группы служатъ производящими поверхности цилиндроида. Уравненіе послѣдней имѣетъ видъ:

$$z(x^2+y^2)=(p_1-p_2)xy,$$

если за оси x, y, z примемъ оси главныхъ винтовъ и директрису.

---

*) Ibid., теор. XXXV и теор. XLV, слѣдствіе II.

**) Оба эти предложенія совершенно иначе доказаны авторами выше приведенныхъ сочиненій.

Ср. Ball, l. cit., p. 85—86; Gravelius, l. cit., p. 249—250;

Ср. также Schell, l. cit., t. II, p. 230.

IV. Каждый винтъ (R, p) группы опредѣляется формулами:

$$z=(p_1-p_2)sn\theta cs\theta, \quad p_\theta=p_1cs^2\theta+p_2sn^2\theta,$$

гдѣ z—координата точки a, въ которой ось винта встрѣчаетъ директрису; θ—уголъ, образуемый осью винта съ осью x.

Эти формулы даютъ для $\theta=\pm\theta_1$

$$z=\pm z_1, \quad p_\theta=p_{-\theta}=k,$$

откуда вытекаетъ:

V. Между винтами группы существуютъ только два винта даннаго параметра k. Эти винты образуютъ одинаковые углы съ каждымъ изъ главныхъ винтовъ и встрѣчаютъ директрису въ точкахъ, одинаково удаленныхъ отъ центра группы.

VI. Между винтами цилиндроида всегда существуетъ одинъ, ось котораго перпендикулярна къ данной прямой B.

Чтобы убѣдиться въ справедливости этого предложенія, проведемъ чрезъ директрису A плоскость, параллельную прямой B. Нормаль α къ проведенной плоскости перпендикулярна къ A и B. Пусть θ_1—уголъ, образуемый прямой α съ осью x. Винтъ цилиндроида, соотвѣтствующій углу θ_1, параллеленъ α и, слѣдовательно, перпендикуляренъ къ B.

Теорема XXXVIII *). **Прямая α, встрѣчающая два винта (λ) и (μ) цилиндроида, имѣющіе равные параметры, встрѣчаетъ третій винтъ подъ прямымъ угломъ.**

Въ самомъ дѣлѣ, пусть λ, μ—точки, въ которыхъ прямая α встрѣчаетъ два винта (λ) и (μ), причемъ

$$a) \quad p_\lambda=p_\mu.$$

Точки λ и μ прямой α принадлежатъ цилиндроиду. Но эта поверхность третьяго порядка; слѣдовательно, α встрѣчаетъ

---

*) Вып. II, стр. 32.

ее въ трехъ точкахъ. Пусть ν—третья точка встрѣчи прямой α съ цилиндроидомъ, (ν)—винтъ послѣдняго, проходящій чрезъ ν. Докажемъ, что прямыя α и (ν) взаимно-перпендикулярны. Для этого примемъ α за ось нѣкотораго винта (α), параметръ p_α котораго опредѣляется изъ условія:

$$b)\quad p_\alpha+p_\lambda=p_\alpha+p_\mu=o.$$

Такъ какъ (α) пересѣкается съ (λ) и (μ), то, въ силу условія (b),

$$\omega_{\alpha\lambda}=\omega_{\alpha\mu}=o$$

т. е., винтъ (α) взаименъ съ (λ) и (μ). Но въ такомъ случаѣ онъ взаименъ со всѣми винтами цилиндроида и, слѣдовательно,

$$\omega_{\alpha\nu}=o.$$

Такъ какъ оси винтовъ (α) и (ν) пересѣкаются, то это условіе имѣетъ видъ:

$$(p_\alpha+p_\nu)csO=o,$$

гдѣ O—уголъ между осяму винтовъ (α) и (ν). Но равенство:

$$p_\alpha+p_\nu=o,$$

невозможно (V), слѣдовательно:

$$csO=o,\ O=90^0.\quad Q.\ E.\ D.$$

Слѣдствіе. Винтъ (α) параметра π, встрѣчающій два винта (λ) и (μ) цилиндроида, имѣющіе общій параметръ — π, взаименъ со всѣми винтами цилиндроида. Винтъ (α) встрѣчаетъ третій винтъ (ν) послѣдняго подъ прямымъ угломъ.

Слѣдствіе II. Поверхность цилиндроида можно образовать слѣдующимъ образомъ. Пусть λ, μ—двѣ прямыхъ, A — прямая, по которой измѣряется ихъ кратчайшее разстояніе, α—

прямая, встрѣчающая послѣднія. Прямая ν, по которой измѣряется кратчайшее разстояніе прямыхъ A и α, есть производящая цилиндроида.

Теорема XXXIX. Прямая α, встрѣчающая одинъ винтъ (ν) цилиндроида подъ прямымъ угломъ, встрѣчаетъ два другихъ винта (λ) и (μ), параметры которыхъ одинаковы.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть ν, λ и μ точки, въ которыхъ α встрѣчаетъ цилиндроидъ. Примемъ α за ось винта (α), параметръ p_α котораго опредѣлимъ изъ условія:

$$b')\quad p_\alpha + p_\lambda = o.$$

Такъ какъ (α) и (λ) пересѣкаются, то

$$\omega_{\alpha\lambda} = o.$$

Далѣе винты (α) и (ν) также взаимны, такъ какъ ихъ оси, по предположенію, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Отсюда мы выводимъ, что (α) взаименъ со всѣми винтами цилиндроида; слѣдовательно,

$$\omega_{\alpha\mu} = o.$$

Но оси α и μ пересѣкаются; слѣдовательно, полученное уравненіе имѣетъ видъ:

$$(p_\alpha + p_\mu) cs O = o,$$

гдѣ O—уголъ между (α) и (μ). Уголъ O вообще не равняется 90°, такъ какъ въ этомъ случаѣ по α измѣрялось бы кратчайшее разстояніе прямыхъ ν и μ, т. е., α совпадала бы съ директрисой цилиндроида. Итакъ

$$p_\alpha + p_\mu = o,$$

откуда, по формулѣ (b'),

$$p_\alpha = p_\nu. \qquad Q.\ E.\ D.$$

Примѣчаніе. Доказанную теорему слѣдуетъ считать обратной по отношенію къ предыдущей теоремѣ.

Теорема XL. Винтъ (α), взаимный со всѣми винтами цилиндроида, встрѣчаетъ одинъ винтъ послѣдняго подъ прямымъ угломъ и два другихъ, имѣющихъ равные параметры—p_α.

Доказательство. Пусть λ, μ, ν—точки встрѣчи оси α съ цилиндроидомъ, (λ), (μ) и (ν)—винты послѣдняго, проходящіе чрезъ λ, μ и ν. По предположенію,

$$\omega_{\alpha\lambda}=\omega_{\alpha\mu}=\omega_{\alpha\nu}=o.$$

Но въ данномъ случаѣ эти уравненія имѣютъ видъ:

$$b'')\quad (p_\alpha+p_\lambda)cs\alpha\lambda=o,\ (p_\alpha+p_\mu)cs\alpha\mu=o,\ (p_\alpha+p_\nu)cs\alpha\nu=o.$$

Изъ равенствъ: $(\alpha\lambda)=90^\circ$, $(\alpha\mu)=90$ и $(\alpha\nu)=90^\circ$ можетъ имѣть мѣсто или одно, или всѣ три. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы имѣли: $(\alpha\lambda)=(\alpha\mu)=90^\circ$, то прямая α совпала бы съ директрисой, откуда вытекало-бы: $(\alpha\nu)=90$. Далѣе изъ равенствъ: $p_\alpha+p_\lambda=o$, $p_\alpha+p_\mu=o$, $(p_\alpha+p_\nu)=o$ могутъ имѣть мѣсто только два. Въ самомъ дѣлѣ, изъ этихъ трехъ равенствъ вытекаетъ $p_\lambda=p_\mu=p_\nu$, что невозможно, такъ какъ существуютъ лишь два винта цилиндроида, имѣющіе одинаковый параметръ. Итакъ равенства $b'')$ влекутъ за собой:

$$\alpha\lambda=90^\circ,\ p_\alpha+p_\mu=o,\ p_\alpha+p_\nu=o,$$

откуда: $p_\mu=p_\nu=-p_\alpha$. *Q. E. D.*

Разсмотримъ теперь группу C винтовъ, взаимныхъ со всѣми винтами цилиндроида. По сказанному въ предыдущей главѣ, порядокъ группы C равенъ 4. Доказанная только что теорема даетъ:

Теорема XLI. Винты α равнаго параметра π, взаимные со всѣми винтами цилиндроида, встрѣчаютъ два винта (μ) и (ν) послѣдняго, общій параметръ которыхъ равенъ $-\pi$.

Слѣдствіе I. Чрезъ каждую точку A проходитъ лишь одинъ винтъ α даннаго параметра π.

Осью послѣдняго служитъ прямая, проходящая чрезъ A и встрѣчающая винты (μ) и (ν). Если A лежитъ на μ, то винтовъ (α) безчисленное множество. Осями ихъ служатъ всѣ прямыя плоскаго пучка (A, ν). Тоже имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда A лежитъ на ν.

Слѣдствіе II. Въ каждой плоскости (A) лежитъ лишь одинъ винтъ (α) даннаго параметра π. Осью его служитъ прямая, соединяющая точки встрѣчи съ (A) винтовъ (μ) и (ν). Если (μ) лежитъ въ (A), то винтовъ (α) безчисленное множество. Оси ихъ образуютъ линейный пучокъ, вершиной котораго служитъ точка встрѣчи плоскости (A) съ (ν). Тоже имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если въ (A) лежитъ винтъ (ν).

Теорема XL даетъ еще слѣдующую:

Теорема XLII. Оси всѣхъ винтовъ группы C суть прямыя, перпендикулярныя къ производящимъ цилиндроида.

Мы видѣли (Вып. II, теор. 30), что перпендикуляры, опущенные изъ какой-нибудь точки A на всѣ производящія цилиндроида, суть производящія нѣкотораго конуса втораго порядка. Но всѣ эти перпендикуляры суть оси винтовъ (α) группы C, что даетъ намъ теорему:

Теорема XLIII. Оси винтовъ группы C, проходящія чрезъ данную точку A, суть производящія конуса (α) втораго порядка.

*Примѣчаніе**). Если A есть точка одной изъ производящей (λ) цилиндроида, то конусъ (α) обращается въ двѣ плоскости. Изъ нихъ одна проходитъ чрезъ производящую (μ), параметръ которой равенъ параметру первой производящей, вторая—перпендикулярна къ (λ).

Пусть B—какая-нибудь прямая. Мы показали выше, что между винтами цилиндроида есть лишь одинъ (β), ось котораго

*) Ср. Занчевскій. lib. cit. стр. 72. Этимъ авторомъ доказана лишь первая часть предложенія.

перпендикулярна къ B. Проведемъ чрезъ β плоскость, параллельную прямой B. Прямая a этой плоскости, перпендикулярная къ β, будетъ параллельна B. Но каждая изъ прямыхъ a есть, по предыдущему, ось винта группы C. Слѣдовательно, мы получили теорему:

Теорема XLIV. Винты (a) группы C, параллельные данной прямой B, лежатъ въ плоскости, проходящей чрезъ винтъ цилиндроида, перпендикулярный къ B.

Теорема XLV. Винты группы C, лежащіе въ одной и той же плоскости (A), обертываютъ параболу.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A какая-нибудь точка плоскости (A). Винты группы C, проходящіе чрезъ A, суть производящія конуса (a). Такъ какъ этотъ конусъ втораго порядка, то лишь двѣ его производящихъ лежатъ въ (A). Отсюда мы заключаемъ, что винты группы C, лежащіе въ (A), обертываютъ коническое сѣченіе, такъ какъ изъ каждой точки A можно провести лишь двѣ касательныхъ къ искомой обертвѣ. Пусть теперь B—какая-нибудь прямая, лежащая въ (A). По предыдущему, винты группы C, параллельные прямой B, лежатъ въ плоскости (β). Плоскость (β) встрѣчаетъ (A) по прямой a, которая служитъ осью винта (a) группы C. Прямая a есть касательная къ вышеупомянутому коническому сѣченію и, кромѣ того, параллельна прямой B. Итакъ параллельно данной прямой B можно провести лишь одну касательную къ коническому сѣченію; слѣдовательно, послѣднее есть парабола. *Q. E. D.*

Въ дополненіе къ сказанному о группѣ четвертаго порядка напомнимъ, что во второмъ выпускѣ (стр. 35) было дано построеніе цилиндроида, взаимнаго со всѣми винтами данной группы четвертаго порядка.

Группа третьяго порядка. Мы назвали винтъ (R_ω, p_σ) входящимъ въ группу C n-го порядка, если

$$(R_\omega, p_\alpha) \equiv \Sigma(R_i^{(i)}, p_{\alpha i}), \quad (i=1, 2, \ldots n)$$

причемъ основные винты $(R_i^{(i)}, p_{\alpha_i})$ независимы между собой. Но въ предыдущихъ изслѣдованіяхъ центръ и слагающая сила винта группы не играли никакой роли. Слѣдовательно, доказанныя теоремы будутъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если, вмѣсто винта (R_ω, p_α), возьмемъ какой-нибудь винтъ $(R'_{\omega'}, p_\alpha)$, отличающійся отъ перваго только центромъ и слагающей силой. Вотъ почему мы не будемъ различать такихъ двухъ винтовъ и скажемъ, что *винтъ* $(R'_{\omega'}, p_\alpha)$ *также входитъ въ группу винтовъ* (R_ω, p_α).

Пусть теперь C_1—взаимная съ C группа винтовъ. Въ C_1 входятъ, по опредѣленію, всѣ винты, взаимные съ каждымъ винтомъ группы C. Такъ какъ условіе взаимности двухъ винтовъ зависитъ лишь отъ параметровъ послѣднихъ и относительнаго положенія ихъ осей, то отсюда слѣдуетъ, что въ винтахъ группы C_1 остаются неопредѣленными центры и слагающія силы. Если, какъ мы только что сказали, и въ винтахъ группы C не будемъ обращать вниманіе на центры и слагающія силы, то придемъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема XLVI. Винтъ (α), взаимный со всѣми винтами группы C_1, входитъ въ группу C. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (β_1), (β_2),..(β_{6-n}) —$(6—n)$ основныхъ винтовъ группы C_1. По условію,

$$\omega_{\alpha\beta_1}=\omega_{\alpha\beta_2}=..=\omega_{\alpha\beta_{6-n}}=0.$$

Этимъ условіямъ, кромѣ (α), удовлетворяютъ вообще безчисленное множество винтовъ, оси которыхъ образуютъ нѣкоторый, вполнѣ опредѣленный комплексъ (A). Каждой прямой послѣдняго соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный коэффиціентъ p_α—параметръ винта, лежащаго на этой прямой. Итакъ только прямыя комплекса (A) могутъ служить осями винтовъ (α). Но каждый винтъ (γ) группы C взаименъ съ C_1. Отсюда мы заключаемъ, что комплексъ осей винтовъ (γ) совпадаетъ съ (A), причемъ, если γ совпадаетъ съ какой-нибудь прямой a послѣдняго, то p_γ равняется коэффиціенту p_α послѣдней. Итакъ винты

(γ) и (α) отличаются только центрами и слагающими силами, т. е., (α) входитъ въ группу C. Q. E. D.

Разсмотримъ теперь тотъ частный случай, когда группа C—третьяго порядка. Взаимная съ C группа C_1 въ этомъ случаѣ тоже третьяго порядка. (Глава VI, стр. 49). Такимъ образомъ всѣ свойства одной изъ этихъ группъ принадлежатъ другой.

Положимъ, что (γ_1), (γ_2) и (γ_3) — три основныхъ винта первой группы. Построимъ цилиндроидъ (γ_1, γ_2) и пусть (γ_4)—одинъ изъ винтовъ послѣдняго. Каждый винтъ цилиндроида (γ_4, γ_3), очевидно, входитъ въ C. Каждому винту (γ_4) цилиндроида (γ_1, γ_2) отвѣчаетъ отдѣльный цилиндроидъ (γ_3, γ_4) винтовъ группы C. Но на цилиндроидѣ (γ_3, γ_4) лежатъ лишь два винта одинаковаго параметра. Отсюда мы заключаемъ:

Теорема XLVII. Между винтами группы третьяго порядка существуетъ безчисленное множество винтовъ равнаго параметра p. Оси этихъ винтовъ лежатъ на нѣкоторой поверхности.

Теорема XLVIII. Винты группы третьяго порядка, имѣющіе одинаковые параметры, суть производящія одного рода однополаго гиперболоида.

Доказательство. Положимъ, что (a), (b) и (c)—три винта параметра p, входящіе въ C. Ни одинъ изъ этихъ винтовъ не входитъ въ группу втораго порядка, построенную на двухъ остальныхъ, такъ какъ въ группѣ втораго порядка есть только два винта одинаковаго параметра. Отсюда мы заключаемъ, что винты (a), (b) и (c) независимы между собой. Проведемъ прямыя α, β и γ, пересѣкающія a, b и c, и примемъ эти прямыя за оси винтовъ (α), (β) и (γ) параметра—p. Два пересѣкающихся винта, сумма параметровъ которыхъ равна нулю, взаимны между собой. Слѣдовательно, винты (α), (β) и (γ) взаимны съ каждымъ изъ винтовъ (a), (b) и (c). Но послѣдніе независимы между собой; слѣдовательно, (α), (β) и (γ) взаимны со всѣми

винтами группы C, т. е., по опредѣленію, входятъ въ C_1. Пусть теперь d—прямая, встрѣчающаяся α, β и γ. Принимая d за ось винта параметра p, найдемъ, какъ и выше, что винтъ (d) взаименъ съ (α), (β) и (γ), т. е., взаименъ съ C_1*). Но такой винтъ (d) входитъ въ C (теор. XLVI). Итакъ каждый винтъ параметра p группы C встрѣчаетъ три прямыхъ α, β и γ. *Q. E. D.*

Слѣдствіе. Винты параметра—p группы C_1 суть производящія втораго рода гиперболоида винтовъ параметра p группы C.

Въ самомъ дѣлѣ, какая-нибудь производящая δ втораго рода встрѣчаетъ всѣ производящія перваго рода. Принимая δ за ось винта (δ) параметра—p, найдемъ, что (δ) взаименъ со всѣми винтами группы C, лежащими на производящихъ перваго рода. Итакъ винтъ (δ) взаименъ съ C и, слѣдовательно, входитъ въ C_1.

Разсмотримъ гиперболоидъ (A) винтовъ нулеваго параметра. Производящія перваго рода будемъ обозначать чрезъ a, втораго — чрезъ α. Замѣтимъ, что, если прямыя a суть оси винтовъ нулеваго параметра, входящихъ въ группу C, то прямая α суть оси винтовъ нулеваго параметра группы C_1.

Пусть O— центръ гиперболоида (A), Ox, Oy, Oz — направленія его осей. Уравненіе гиперболоида имѣетъ слѣдующій видъ:

$$A)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

гдѣ a, b, c — длины полуосей. По извѣстной теоремѣ, если O_1, O_2, O_3 — углы, образуемые съ осями производящей a, d_1, d_2, d_3—кратчайшія разстоянія послѣдней отъ осей, то

$$d_1 tgO_1=\pm\frac{bc}{a},\quad d_2 tgO_2=\pm\frac{ca}{b},\quad d_3 tgO_3=\mp\frac{ab}{c}\,.$$

*) *Примѣчаніе.* Независимость винтовъ (α), (β) и (γ) доказывается точно также, какъ независимость винтовъ (a), (b) и (c). *Авт.*

Въ этихъ формулахъ берутся одновременно всѣ верхніе или всѣ нижніе знаки. Положимъ, что производящимъ α соотвѣтствуютъ верхніе знаки.

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ:

$$-\frac{bc}{a}\,csO_1+d_1snO_1=o,\quad -\frac{ca}{b}\,csO_2+d_2snO_2=o,$$

$$\frac{ab}{c}\,csO_3+d_3snO_3=o.$$

Слѣдовательно, если мы примемъ оси x, y, z за оси винтовъ, параметры которыхъ даются формулами:

$$A)\quad p_x=-\frac{bc}{a},\ p_y=-\frac{ca}{b},\ p_z=\frac{ab}{c},$$

то винты (p_x), (p_y) и (p_z) будутъ взаимны съ каждымъ винтомъ (α) группы C_1, такъ какъ винты (α) нулеваго параметра. Отсюда вытекаетъ, что винты (p_x), (p_y) и (p_z) входятъ въ группу C.

Мы получили такимъ образомъ теорему:

*Теорема XLIX**). Въ группѣ C третьяго порядка есть три винта, оси которыхъ, пересѣкаясь въ одной точкѣ, взаимно-перпендикулярны.

Винты (p_x), (p_y) и (p_z) называются *центральными*, а точка ихъ пересѣченія O *центральной* точкой группы C.

Слѣдствіе. Формулы B) даютъ:

$$p_xp_yp_z=abc,\quad p_yp_z=-a^2,\quad p_zp_x=-b^2,\quad p_xp_y=c^2;$$

---

*) *Примѣчаніе.* Доказательство, предложенное здѣсь, значительно отличается отъ тѣхъ, которыя были даны до сихъ поръ.

Ср. Ball., l. cit. p. 119—120; Gravelius, l. cit. S. 289—290; Зинчевскій, l. cit. стр. 59—601.

Ср. также выпускъ II, стр. 53—54. *Авт.*

слѣдовательно, уравненіе A) приметъ видъ:

$$A') \quad p_x x^2 + p_y y^2 + p_z z^2 + p_x p_y p_z = o.$$

Теорема L. Всѣ гиперболоиды имѣютъ общій центръ и общее направленіе осей.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть (α)—винтъ параметра—p группы C_1. Этотъ винтъ, по предыдущему, взаимонъ съ (p_x), (p_y), (p_z); слѣдовательно,

$$(p_x - p) cs O_1 + d_1 sn O_1 = o, \quad (p_y - p) cs O_2 + d_2 sn O_2 = o,$$
$$(p_z - p) cs O_3 + d_3 sn O_3 = o,$$

гдѣ O_1, O_2 и O_3, d_1 d_2 и d_3—углы съ осями x, y, z и кратчайшія разстоянія отъ послѣднихъ прямой α.

Эти формулы даютъ:

$$d_1 tg O_1 = -(p_x - p), \quad d_2 tg O_2 = -(p_y - p), \quad d_3 tg O_3 = -(p_z - p).$$

Но по теоремѣ, на которую мы уже ссылались, этимъ условіямъ удовлетворяютъ производящія одного рода гиперболоида, оси котораго совпадаютъ съ x, y, z, а длины a_1, b_1 и c_1 полуосей опредѣляются изъ условій:

$$B') \quad \frac{b_1 c_1}{a_1} = p - p_x, \quad \frac{c_1 a_1}{b_1} = p - p_y, \quad -\frac{a_1 b_1}{c_1} = p - p_z.$$

Слѣдствіе. Изъ формулъ B') вытекаетъ:

$$(p - p_x)(p - p_y)(p - p_z) = -a_1 b_1 c_1$$
$$(p - p_y)(p - p_z) = -a_1^2, \quad (p - p_z)(p - p_x) = -b_1^2,$$
$$(p - p_x)(p - p_y) = c_1^2.$$

Но уравненіе гиперболоида винтовъ (α) имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1.$$

Исключая a_1, b_1 и c_1 помощью полученныхъ формулъ, мы приведемъ это уравненіе къ виду:

$$B'')\quad (p-p_x)x^2+(p-p_y)y^2+(p-p_z)z^2+ \\ +(p-p_x)(p-p_y)(p-p_z)=o.$$

Слѣдствіе II. Чрезъ каждую точку (x, y, z) пространства проходятъ вообще три винта группы третьяго порядка.

Это прямо слѣдуетъ изъ послѣдняго уравненія. Считая въ немъ величины x, y и z данными, мы получаемъ кубическое уравненіе для опредѣленія p.

Слѣдствіе III. Параметръ винта группы C обратно-пропорціоналенъ квадрату параллельнаго діаметра гиперболоида (A).

Въ самомъ дѣлѣ, винтъ (α) параметра p лежитъ на гиперболоидѣ:

$$(p-p_x)x^2+(p-p_y)y^2+(p-p_z)z^2+(p-p_x)(p-p_y)(p-p_z)=o.$$

Ассимптотическій конусъ послѣдняго представляется уравненіемъ:

$$C)\quad (p-p_x)x^2+(p-p_y)y^2+(p-p_z)z^2=o.$$

Пусть α_1 — производящая конуса, параллельная α. Прямая α_1 удовлетворяетъ послѣднему уравненію и, кромѣ того, встрѣчаетъ гиперболоидъ (A) въ нѣкоторой точкѣ m.

Координаты точки m должны, слѣдовательно, удовлетворять уравненіямъ $A')$ и $C)$.

Но второе изъ этихъ уравненій даетъ:

$$r^2=\frac{p_x x^2+p_y y^2+p_z z^2}{p},$$

гдѣ r—разстояніе точки m отъ центральной точки. Изъ уравненія $A')$ слѣдуетъ:

$$p_x x^2+p_y y^2+p_z z^2=-p_x p_y p_z,$$

откуда

$$r^2 = -\frac{p_x p_y p_z}{p} \text{ и } p = -\frac{p_x p_y p_z}{r^2}. \quad Q.\ E.\ D.$$

Доказанныя теоремы заключають основныя свойства группы третьяго порядка.

Въ заключеніе настоящей главы укажемъ на одно свойство группы шестаго порядка, которое мы раньше (стр. 58) допустили безъ доказательства. Прежде всего замѣтимъ, что вообще нѣтъ винтовъ, взаимныхъ со всѣми винтами группы шестаго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, одинъ такой винтъ (α) долженъ былъ бы удовлетворять шести условіямъ вида: $\omega_{\sigma\beta}=o$. Но въ эти условія входятъ лишь параметръ винта (α) и величины, опредѣляющія положенія его оси. Такъ какъ прямая опредѣляется 4 величинами, то, слѣдовательно, пять неизвѣстныхъ величинъ должны быть опредѣлены изъ 6 условныхъ уравненій: $\omega_{\alpha\beta}=o$, что вообще невозможно.

Докажемъ теперь, что всякій винтъ параметра p, осью котораго служитъ данная прямая α, входитъ въ группу шестаго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, каждый винтъ группы построенной на 6 независимыхъ винтахъ $(R_1^{(1)}, p_1)$, $(R_2^{(2)}, p_2)$, .. $(R_6^{(6)}, p_6)$, опредѣляется 5-ю отношеніями: $\frac{R_1^{(1)}}{R_6^{(6)}}, \frac{R_1^{(2)}}{R_6^{(6)}}, \ldots \frac{R_5^{(5)}}{R_6^{(6)}}$. Винтъ параметра p, лежащій на прямой α, также опредѣляется 5 величинами если на центръ винта мы не обращаемъ вниманія. Изъ этихъ 5 величинъ 4 опредѣляютъ положеніе винтовой оси, пятая — параметръ. Такъ какъ число неизвѣстныхъ равно числу произвольныхъ величинъ $\frac{R_i^{(i)}}{R_6^{(6)}}$, которыми можно располагать при опредѣленіи винта группы, то мы заключаемъ, что всегда можно такъ подобрать величины $R_i^{(i)}$, чтобы результирующій винтъ группы имѣлъ данный параметръ и данную ось α. $Q.\ E.\ D.$

ГЛАВА VII.

О возможномъ перемѣщеніи подобно-измѣняемой системы точекъ. Лучистое растяженіе. Общія свойства. Кинематическій винтъ. Работа силъ, приложенныхъ къ точкамъ подобно-измѣняемой системы.

Назовемъ *гомологичными* два положенія A и A' подобно-измѣняемой фигуры A. A и A' суть, по опредѣленію, двѣ подобныя фигуры. Два ихъ элемента a и a', представляющихъ положенія въ A и A' одного и того же элемента a фигуры A, также назовемъ *гомологичными*. Если a совпадаетъ съ a', то элементъ a назовемъ *двойнымъ* элементомъ фигуръ A и A'.

I. *О лучистомъ растяженіи.* Пусть A—какая-нибудь фигура, O—опредѣленная точка послѣдней. Соединимъ съ O всѣ точки a фигуры A и на прямыхъ Oa построимъ точки a' такъ, чтобы

$$1)\quad \frac{Oa'}{Oa}=E,$$

гдѣ E—нѣкоторое число, а отрѣзки Oa и Oa' имѣютъ одинаковое направленіе. Точки a', очевидно, образуютъ фигуру A', подобную фигурѣ A. O есть двойная точка, а всякая прямая Oaa'—двойная прямая обѣихъ фигуръ. Такъ какъ фигуры A и A' подобны, то каждую изъ нихъ можемъ считать положеніемъ подобно-измѣняемой фигуры A, точки a которой изъ положенія a перешли въ положенія a', причемъ точка O фигуры неподвижна. Такое движеніе фигуры A назовемъ *лучистымъ растяженіемъ* (сжатіемъ), точку O — *центромъ* послѣдняго. Итакъ лучистымъ растяженіемъ называется такое движеніе подобно-измѣняемой фигуры A, при которомъ одна изъ ея точекъ, центръ растяженія, остается неподвижной, а всѣ остальныя точки движутся по прямымъ, соединяющимъ ихъ съ центромъ

растяженія. Отношеніе $\frac{\alpha\alpha'}{O\alpha}=\tau$ пути, проходимаго при этомъ какой-нибудь точкой α, къ первоначальному разстоянію этой точки отъ центра O растяженія (сжатія) назовемъ коэффиціентомъ растяженія (сжатія). Очевидно,

$$p=\frac{O\alpha'-O\alpha}{O\alpha}=E-1.$$

Пусть (α, α'), (β, β'), (γ, γ') — три пары гомологичныхъ точекъ фигуръ A и A'.

Изъ равенствъ:

$$\frac{1}{E}=\frac{O\alpha}{O\alpha'}=\frac{O\beta}{O\beta'}=\frac{O\gamma}{O\gamma'},$$

мы заключаемъ, что прямыя $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$, $\alpha\gamma$ и $\alpha\gamma'$, $\beta\gamma$ и $\gamma'\gamma'$ соотвѣтственно параллельны. Слѣдовательно, параллельны и плоскости $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$. Но эти прямыя и плоскости гомологичны. Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема LI. Если подобно-измѣняемая фигура испытываетъ лучистое растяженіе (сжатіе), то прямыя и плоскости фигуры движутся параллельно самимъ себѣ.

Слѣдствіе. Прямыя и плоскости, проходящія чрезъ центръ растяженія остаются неподвижными.

Эта теорема вполнѣ обрисовываетъ лучистое растяженіе.

II. *Общія свойства.* Разсмотримъ здѣсь соотношенія между двумя положеніями A и A' подобно-измѣняемой фигуры A.

Теорема LII. Если два положенія A и A' подобно-измѣняемой фигуры A имѣютъ двойную прямую L, то они имѣютъ двойную точку O на той же прямой.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α, β, γ,..—точки прямой L, принадлежащія фигурѣ A. Такъ какъ L—двойная прямая, то гомологичныя точки α', β', γ' фигуры A' также лежатъ на L. Итакъ на прямой L лежатъ два ряда точекъ $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ и

(α', β', γ',..). Но эти ряды подобны; слѣдовательно, теорема доказана *).

Теорема LIII. Если два положенія A и A' подобноизмѣняемой фигуры A имѣютъ двойную точку O, то они имѣютъ одну двойную прямую L, проходящую чрезъ O.

Доказательство. Пусть A и A'—два положенія фигуры A, O—двойная точка фигуръ A и A', (α, α') — пара гомологичныхъ точекъ послѣднихъ. Подвергнемъ фигуру A въ положеніи A' лучистому растяженію (сжатію), за центръ котораго примемъ точку O, до тѣхъ поръ, пока растоянія $O\alpha''$ новыхъ положеній точекъ α' отъ O не станутъ равными разстояніямъ $O\alpha$ отъ той же точки O гомологичныхъ точекъ фигуры A. Точки α'' образуютъ фигуру A$''$, которая, очевидно, конгруэнтна фигурѣ A, причемъ O — общая точка фигуръ A и A''. Но двѣ конгруэнтныя фигуры, имѣющія общую точку, имѣютъ двойную прямую, проходящую чрезъ O **). Назовемъ ее чрезъ L. Съ L совпадаютъ, слѣдовательно, гомологичныя прямыя l и l'' фигуръ A и A''. Прямая l' фигуры A', гомологичная прямой l'' фигуры A'', гомологична и прямой l. Но прямыя l'' и l' совпадаютъ (теор. LI, слѣд.); слѣдовательно, совпадаютъ прямыя l и l', т. е., L есть двойная прямая фигуръ A и A' *Q. E. D.*

Перейдемъ теперь къ общему случаю.

Пусть A и A'—два положенія фигуры A, (α, α')—пара гомологичныхъ точекъ. Эти точки суть центры пучковъ гомологичныхъ прямыхъ l и l'. Перенесемъ фигуру A, какъ неизмѣняемую фигуру, параллельно самой себѣ такъ, чтобы точка α

---

*) *Ярошенко* Проэктивная геометрія, стр. 122.

Замѣчу, что, кромѣ O, ряды (α, β, γ,..), (α', β', γ',..) имѣютъ другую двойную точку, которая лежитъ въ безконечности.

**) *Chasles.* Sur le déplacement d'une figure de forme invariable dans l'espace. Comptes rendus hebd. des Séances de l'Académie des Sciences. Paris, 1860, T. LI.

совпала съ α'. Пусть новое положеніе фигуры A есть A''. Гомологичныя прямыя λ и λ'' послѣднихъ параллельны между собой. Но двѣ фигуры A' и A'', по только что доказанной теоремѣ, имѣютъ общую прямую L (l', l''). Слѣдовательно, если l—прямая фигуры A, гомологичная прямой l', то прямыя l и l' параллельны между собой.

Пусть теперь (β, β')—другая пара гомологичныхъ точекъ. Проведемъ чрезъ β прямую m, параллельную прямой l. Гомологичная m прямая m' фигуры A' проходитъ чрезъ β' и параллельна прямой l', такъ какъ къ подобно-измѣняемой фигурѣ прямыя остаются прямыми, а углы не измѣняются. Но прямыя l и l' параллельны; слѣдовательно, параллельны и прямыя m, m'.

Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема LIV. Если подобно-измѣняемая фигура А перешла изъ положенія A въ A', то чрезъ каждую точку α фигуры A проходитъ опредѣленная прямая l, параллельная гомологичной прямой фигуры A'. Прямыя l, соотвѣтствующія различнымъ точкамъ α фигуры A, параллельны между собой.

Пусть A и A'—два положенія фигуры А, (α, α') — пара гомологичныхъ точекъ, (l, l')—параллельныя гомологичныя прямыя, проходящія чрезъ α и α' соотвѣтственно. Проведемъ чрезъ l плоскость λ. Гомологичная λ плоскость λ' фигуры A' проходитъ чрезъ l. Точку плоскостей λ, проходящихъ чрезъ l, отвѣчаетъ въ A' пучекъ плоскостей λ', проходящихъ чрезъ l'. Уголъ (λ_1, λ_2), образуемый двумя плоскостями λ_1 и λ_2 перваго порядка, равенъ углу (λ_1', λ_2'), образуемому двумя гомологичными плоскостями втораго, такъ какъ въ подобно измѣняемой системѣ углы не измѣняются. Но оси l и l' этихъ пучковъ параллельны; слѣдовательно, гомологичныя плоскости пересѣкаются по производящимъ s прямого круглаго цилиндра σ, проходящаго чрезъ l и l'. Такъ какъ поверхность, подобная прямому круглому цилиндру, есть также прямой круглый цилиндръ, то, слѣдова-

тельно, цилиндру σ гомологиченъ въ A' прямой круглый цилиндръ σ'. Но σ проходитъ чрезъ l, слѣдовательно, σ' проходитъ чрезъ l'. Кромѣ того, по предыдущему, l' лежитъ на σ. Отсюда мы заключаемъ, что σ и σ' имѣютъ еще одну общую производящую s. Замѣчая, что плоскости (l, s) и (l', s) гомологичны, мы заключаемъ, что прямая s', гомологичная прямой s, должна лежать въ плоскости (l', s). Но эта прямая должна лежать и на цилиндрѣ σ' и, кромѣ того, не совпадаетъ съ l'; слѣдовательно, она совпадаетъ съ s.

Мы получили такимъ образомъ теорему *).

Теорема LV. Два положенія A и A' подобно-измѣняемой фигуры всегда имѣютъ двойную прямую s и, слѣдовательно, двойную точку O. (Теор. LII).

Прямую s назовемъ центральной прямой, точку O—центральной точкой фигуръ A и A'.

Проведемъ чрезъ s двѣ плоскости σ_1, σ_2. Гомологичныя имъ плоскости σ_1', σ_2' фигуры A' должны проходить чрезъ s такъ какъ s—двойная прямая. Уголъ (σ_1, σ_2) равенъ, по предыдущему, углу (σ_1', σ_2'). Прибавляя къ каждому изъ этихъ угловъ или вычитывая общій уголъ (σ_1', σ_2), найдемъ:

$$\angle(\sigma_1, \sigma_1') = \angle(\sigma_2, \sigma_2'),$$

что даетъ теорему:

Теорема LVI. Гомологичныя плоскости обѣихъ фигуръ, проходящія чрезъ центральную прямую, образуютъ между собой одинъ и тотъ же уголъ.

Назовемъ этотъ уголъ *угломъ вращенія* фигуръ A и A' и обозначимъ его чрезъ θ. На основаніи предыдущаго для того, чтобы перевести фигуру A изъ положенія A въ положе-

*) *Примѣчаніе.* Обращаю вниманіе на предложенное здѣсь доказательство. Оно легко можетъ быть приложено къ гомографическимъ фигурамъ. *Авт.*

ніе A', нужно фигуру, не измѣняя ея размѣровъ, повернуть вокругъ центральной прямой S на уголъ θ и затѣмъ подвергнуть лучистому растяженію (сжатію), центръ котораго въ центральной точкѣ O. Коэффиціентъ растяженія или сжатія равенъ отношенію $\frac{aa'}{Oa}$, если (a, a')—пара гомологичныхъ точекъ центральной прямой.

Для случая двухъ безконечно-близкихъ положеній подобно-измѣняемой фигуры получаемъ теорему:

Теорема LVII. Элементарное движеніе подобно-измѣняемой фигуры состоитъ изъ элементарнаго вращенія $d\vartheta$ вокругъ опредѣленной прямой S и элементарнаго лучистаго растяженія $d\tau$, центромъ котораго служитъ опредѣленная точка O прямой S.

III. *О кинематическомъ винтѣ.* Назовемъ центральнымъ винтомъ совокупность элементарнаго вращенія $d\vartheta$ вокругъ S и лучистаго растяженія (сжатія) $d\tau$, центромъ котораго служитъ опредѣленная точка O прямой S. Отношеніе $\frac{d\tau}{d\vartheta}$ назовемъ *параметромъ* p винта. Самый винтъ будетъ обозначать символомъ $(d\vartheta_{,}, p_0)$.

Условимся считать $d\vartheta$ положительной величиной, а $d\tau$—положительной въ случаѣ растяженія, отрицательной въ случаѣ сжатія. Тогда параметръ p будетъ положителенъ въ первомъ случаѣ, отрицателенъ во второмъ *).

Для того, чтобы геометрически представить винтъ $(d\vartheta_{,}, p_0)$, откладываемъ на оси S отрѣзокъ $O\omega$, равный $\frac{d\vartheta}{dt}$, и стрѣлкой

*) *Примѣчаніе.* За недостаткомъ мѣста я немогу изложить здѣсь теорію центральныхъ винтовъ и вынужденъ отослать читателя къ слѣдующему выпуску настоящаго труда. Ограничусь замѣчаніемъ, что свойства кинематическихъ и силовыхъ винтовъ подобно-измѣняемой системы тожественны. Такимъ образомъ относительно подобно-измѣняемой системы можно повторить слова Бали, сказанныя имъ въ примѣненіи къ твердому тѣлу: «.... законы сложенія кинематическихъ винтовъ (twist) и силовыхъ (wrench) тожественны». Ball, l. cit, p. 11, § 12. Cp. Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Jour. de Liouville, 1851 г. T. XVI, p. 22, примѣчаніе къ § 20.

указываемъ сторону вращенія $d\vartheta$, затѣмъ откладываемъ на той-же прямой S отрѣзокъ Op, равный параметру p винта. Отрѣзки $O\omega$ и Op имѣютъ одинаковое направленіе, если параметръ p положителенъ; — противоположное, если параметръ отрицателенъ.

Выведемъ теперь формулы для возможныхъ перемѣщеній точекъ подобно-измѣняемой фигуры. Замѣтимъ прежде всего, что на основаніи предыдущаго всякое возможное перемѣщеніе фигуры сводится къ опредѣленному центральному винту $(d\vartheta_s, p_0)$. Примемъ центръ O послѣдняго за начало прямоугольныхъ координатъ x, y, z, причемъ ось z направимъ по оси S винта. Тогда, если x, y, z — координаты точки a фигуры, φ — уголъ съ осью z, образуемый прямой $Oa=\rho$, ψ—уголъ, образуемый плоскостью (S, Oa) съ осью x, то

$$A)\quad x=\rho sn\varphi cs\psi,\quad y=\rho sn\varphi sn\psi,\quad z=\rho cs\varphi.$$

На основаніи предыдущаго,

$$\delta\psi=\delta\vartheta,\ \delta\rho=\rho\delta\tau=\rho p\delta\vartheta,\ \delta\varphi=o:$$

слѣдовательно, формулы A) дадутъ:

$$B)\left\{\begin{aligned}
\delta x &= sn\varphi cs\psi\delta\rho-\rho sn\varphi sn\psi\delta\psi=\rho sn\varphi\delta\vartheta(pcs\psi-sn\psi)\\
\delta y &= sn\varphi sn\psi\delta\rho+\rho sn\varphi cs\psi\delta\psi=\rho sn\varphi\delta\vartheta(psn\psi+cs\psi)\\
\delta z &= cs\varphi\delta\rho \qquad\qquad\qquad\quad =\rho pcs\varphi\delta\vartheta\\
\delta s^2 &= \delta x^2+\delta y^2+\delta z^2=\delta\rho^2+\rho^2sn^2\varphi\delta\psi^2=\rho^2\delta\vartheta^2(p^2+sn^2\varphi)
\end{aligned}\right.$$

Послѣдняя изъ формулъ B) показываетъ, что элементъ δs пути точки a лежитъ въ касательной плоскости къ прямому круглому конусу, вершина котораго въ O, а осью служитъ ось z. При этомъ

$$C)\quad tg(\rho, \delta s)=\frac{\rho sn\varphi\delta\psi}{\delta\rho}=\frac{sn\varphi}{p}.$$

Формулы B) можно помощью формулъ A) представить въ слѣдующемъ, болѣе удобномъ видѣ:

$$B') \quad \delta x=(px-y)\delta\vartheta,\ \delta y=(py+x)\delta\vartheta,\ \delta z=pz\delta\vartheta.$$

Пусть α, β—двѣ точки фигуры. Обозначая $\alpha\beta$ чрезъ r, cs'ы угловъ, образуемыхъ этой прямой съ осями координатъ чрезъ α, β, γ, найдемъ:

$$x-x'=\rho\alpha,\ y-y'=\rho\beta,\ z-z'=\rho\gamma,$$

гдѣ x', y', z'—координаты точки β. Формулы B') даютъ:

$$B'') \begin{cases} \delta x-\delta x'=[p(x-x')-(y-y')]\delta\vartheta=\rho(p\alpha-\beta)\delta\vartheta, \\ \delta y-\delta y'=[p(y-y')+(x-x')]\delta\vartheta=\rho(p\beta+\alpha)\delta\vartheta, \\ \delta z-\delta z'=p(z-z')\delta\vartheta=\rho p\gamma\delta\vartheta. \end{cases}$$

Вычислимъ теперь работу пары вращенія $((P, \alpha\beta))$, плечомъ которой служитъ отрѣзокъ $\alpha\beta$. Если X, Y, Z — слагающія силы P, дѣйствующей на точку α, то слагающія силы—P, дѣйствующей на β, будутъ: $-X$, $-Y$, $-Z$. Обозначая cs'ы угловъ, образуемыхъ съ осями координатъ направленіемъ силы P, чрезъ λ, μ, ν, имѣемъ:

$$X=P\lambda,\ Y=P\mu,\ Z=P\nu.$$

Кромѣ того, прямая $\alpha\beta$ перпендикулярна къ направленію силы P, слѣдовательно,

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=o.$$

Возможная работа $\delta\Pi$ пары $(P, \alpha\beta)$ представляется выраженіемъ:

$$\delta\Pi=X(\delta x-\delta x')+Y(\delta y-\delta y')+Z(\delta z-\delta z')$$

или

$$\delta\Pi = P\rho\delta\vartheta\{p(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)+(\alpha\mu-\beta\lambda)\},$$

что въ силу послѣдней формулы принимаетъ видъ:

$$\delta\Pi = P\rho\delta\vartheta(\alpha\mu-\beta\lambda).$$

Но, если M моментъ пары, l, m, n—cs'ы угловъ съ осями координатъ прямой M, то

$$M=P\rho,\ l\alpha+m\beta+n\gamma=o,\ l\lambda+m\mu+n\nu=o,$$

такъ какъ прямая M перпендикулярна къ плоскости пары. Изъ послѣднихъ формулъ выводимъ:

$$\frac{l}{\beta\nu-\gamma\mu}=\frac{m}{\gamma\lambda-\alpha\nu}=\frac{n}{\alpha\mu-\beta\lambda}=\frac{1}{h},$$

гдѣ

$$h^2=(\beta\nu-\gamma\mu)^2+(\gamma\lambda-\alpha\nu)^2+(\alpha\mu-\beta\lambda)^2=$$

$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)^2=1,$$

въ силу формулы: $\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=o$.

Итакъ

$$\alpha\mu-\beta\lambda=\pm n,$$

благодаря чему, предыдущее выраженіе для $\delta\Pi$ обратится въ слѣдующее:

$$D)\quad \delta\Pi=\pm Mn\delta\vartheta=N\delta\vartheta,$$

гдѣ N—слагающая момента M по оси вращенія z.

Формула D) показываетъ, что работа пары вращенія вычисляется точно также, какъ работа пары Пуансо въ твердомъ тѣлѣ.

Слѣдствіе. Пара вращенія, моментъ которой перпендикуляренъ къ оси центральнаго винта, не производитъ никакой работы.

Вычислимъ теперь работу $\delta\Pi_1$ пары растяженія (P, ρ).

Въ первой главѣ мы видѣли, что

$$\delta\Pi_1 = P\delta\rho.$$

Замѣняя здѣсь $\delta\rho$ на $p\rho\delta\vartheta$ и замѣчая, что $P\rho$ есть моментъ M_1 пары, получимъ:

$$E) \quad \delta\Pi_1 = M_1 p\delta\vartheta.$$

Намъ остается вычислить работу $\delta\Pi_2$ силы P_α. Для этого воспользуемся формулами B').

Если X, Y, Z—слагающія силы P, x, y, z—координаты точки α, то

$$\delta\Pi_2 = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = p\delta\vartheta(Xx + Yy + Zz) + \delta\vartheta(xY - yX).$$

Эту формулу можно также получить, если приведемъ силу P_α къ центральной точкѣ, но этотъ выводъ сложнѣе.

Внося въ послѣднюю формулу, вмѣсто X, Y, Z ихъ выраженія помощью величины силы P и cs'овъ λ, μ, ν, образуемыхъ послѣдней съ осями, найдемъ:

$$F) \quad \delta\Pi_2 = P\delta\vartheta\{p(\lambda x + \mu y + \nu z) + (x\mu - y\lambda)\}.$$

Теперь мы можемъ вычислить работу силоваго винта (P_α, p_σ), центръ котораго въ α, осью служитъ прямая σ. Замѣчая, что моментъ винтовой пары равенъ Pp_σ, найдемъ для искомой работы $\delta\Pi_3$:

$$\delta\Pi_3 = \delta\Pi + \delta\Pi_2 = Pp_\sigma\nu\delta\vartheta + P\delta\vartheta\{p(\lambda x + \mu y + \nu z) + (x\mu - y\lambda)\},$$

$$G) \quad \delta\Pi_3 = P\delta\vartheta\{\nu p_\sigma + (\lambda x + \mu y + \nu z)p + (\mu x - \lambda y)\}\text{*)}.$$

---

*) *Примѣчаніе.* Это выраженіе работы силоваго винта значительно отличается отъ соотвѣтствующей работы винта, дѣйствующаго на твердое тѣло[1]).

[1]) Cp. Ball. l. cit. p. 12.

Изъ полученной формулы вытекаетъ, что винтъ (p_σ) не производитъ никакой работы по отношенію къ винту (p), если

$$H)\quad \nu p_\sigma + (\lambda x + \mu y + \nu z)p + (\mu x - \lambda y) = o.$$

Назовемъ такой винтъ (p_σ) *особымъ* по отношенію къ винту (p). Полученному условію не трудно дать геометрическое толкованіе. Для этого замѣтимъ, что уравненіе оси (σ) имѣетъ видъ:

$$\frac{\xi - x}{\lambda} = \frac{\eta - y}{\mu} = \frac{\zeta - z}{\nu}.$$

Проекція этой оси на плоскости (x, y) представляется уравненіемъ:

$$\mu\xi - \lambda\eta = \mu x - \lambda y.$$

Кратчайшее разстояніе d этой проекціи отъ начала координатъ есть:

$$d = \frac{\mu x - \lambda y}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\mu x - \lambda y}{\sqrt{1 - \nu^2}} = \frac{\mu x - \lambda y}{snO},$$

если O—уголъ, cs'ъ котораго равенъ ν. Далѣе вводя:

$$x = \rho\alpha,\ y = \rho\beta,\ z = \rho\beta,$$

получимъ:

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \rho cs(\rho, \sigma).$$

Итакъ предыдущее условіе приметъ видъ:

$$p_\sigma csO + dsnO + p\rho cs(\rho, \sigma) = o.$$

Можно было-бы геометрически вывести это условіе. Но на этомъ останавливаться не будемъ и перейдемъ къ изслѣдованію формулы H. Представимъ ее для этого въ слѣдующихъ видахъ:

$$H')\quad \lambda(px-y)+\mu(py+x)+\nu(pz+p_\sigma)=o,$$

$$H'')\quad x(p\lambda+\mu)+y(p\mu-\lambda)+zp\nu+\nu p_\sigma=o,$$

къ которымъ надо прибавить условіе:

$$I)\quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

Изъ формулы H'') вытекаетъ.

Теорема LVIII. Центры параллельныхъ силовыхъ винтовъ равнаго параметра p_σ, особыхъ по отношенію къ кинематическому винту (p), лежатъ въ плоскости P.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ величины λ, μ, ν и p_σ постоянны.

Уравненіе плоскости P имѣетъ видъ:

$$1)\quad x(p\lambda+\mu)+y(p\mu-\lambda)+zp\nu+\nu p_\sigma=o.$$

Такъ какъ p_σ входитъ въ членъ, независящій отъ (x, y, z), то мы получаемъ теорему:

Теорема LIX. Плоскости P, соотвѣтствующія различнымъ параметрамъ p_σ, параллельны между собой. Параметры p_σ пропорціональны разстояніямъ d плоскостей P отъ центра кинематическаго винта.

Въ самомъ дѣлѣ, этотъ центръ есть начало координатъ. Изъ уравненія 1) для d получаемъ выраженіе:

$$d=\frac{\nu p_\sigma}{\sqrt{(p\lambda+\mu)^2+(p\mu-\lambda)^2+p^2\nu^2}}=\frac{\nu p_\sigma}{\sqrt{p^2+1-\nu^2}}$$

въ силу 1).

Каждому направленію (λ, μ, ν) силовыхъ винтовъ отвѣчаетъ отдѣльный пучекъ π параллельныхъ плоскостей P. Если (α, β, γ)—направленіе общей нормали N къ плоскостямъ P, то направленія (λ, μ, ν) и (α, β, γ) назовемъ *сопряженными.*

Между сопряженными направленіями имѣются слѣдующія соотношенія:

$$2)\quad p\lambda+\mu=R\alpha,\ p\mu-\lambda=R\beta,\ p\nu=R\gamma,$$

гдѣ R—нѣкоторый множитель. Возвышая эти уравненія въ квадратъ и сложивъ результаты, находимъ:

$$2')\quad p^2+1-\nu^2=R^2,$$

откуда

$$3)\quad R=\sqrt{1+p^2-\nu^2}.$$

Въ силу 2') и послѣдней изъ формулъ 2) находимъ:

$$p^2R^2=p^2(1+p^2)-p^2\nu^2=p^2(1+p^2)-\gamma^2R^2,$$

откуда

$$3')\quad R=p\sqrt{\frac{1+p^2}{\gamma^2+p^2}}.$$

Умноживъ уравненія 2) на λ, μ и ν соотвѣтственно и сложивъ результаты, найдемъ:

$$p=R(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)=Rcs(\sigma,N),$$

слѣдовательно,

$$4)\quad cs(\sigma,N)=\frac{p}{\sqrt{1+p^2-\nu^2}};\ tg(\sigma,N)=\frac{1}{p}\sqrt{1-\nu^2}.$$

Изъ 2) и 3) слѣдуетъ:

$$5)\quad \alpha=\frac{p\lambda+\mu}{\sqrt{1+p^2-\nu^2}},\ \beta=\frac{p\mu-\lambda}{\sqrt{1+p^2-\nu^2}},\ \gamma=\frac{p\nu}{\sqrt{1+p^2-\nu^2}}=$$

$$=\nu cs(\sigma,N).$$

Проведемъ чрезъ начало координатъ прямыя $S(\lambda,\mu,\nu)$ и

T (α, β, γ). Эти прямыя и ось z встрѣтятъ шаровую поверхность, центръ которой въ началѣ координатъ, въ точкахъ S, T и Z.

По извѣстной формулѣ

$$csZT = csZScsST + snZSsnSTcsS.$$

Но въ данномъ случаѣ

$$csZT = \gamma,\ csZS = \nu,\ \angle(S, T) = \angle(\sigma, N),$$

слѣдовательно, въ силу послѣдней изъ формулъ 5),

$$6)\quad csS = o,$$

что даетъ теорему:

Теорема LX. Плоскость, параллельная осямъ z и σ кинематическаго винта и особаго силоваго винта, перпендикулярна къ плоскости, параллельной оси σ послѣдняго и сопряженному съ σ направленію.

Вышеупомянутый сферическій треугольникъ STZ. уголъ S котораго равенъ прямому, даетъ:

$$tgST = snZStgZ$$

или въ силу 4)

$$\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{p} = \sqrt{1-\nu^2}\, tgZ,$$

откуда

$$7)\quad cotZ = p.$$

Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема LXI. Плоскость, параллельная осямъ кинематическаго и особаго силоваго винта (p_σ), образуетъ постоянный уголъ Z съ плоскость, параллельной оси кинематическаго винта и направленію, сопряженному съ σ. $CotZ$ равенъ параметру p кинематическаго винта.

Каждому направленію (λ, μ, ν) особыхъ винтовъ (p_σ) отвѣчаетъ отдѣльный пучекъ параллельныхъ плоскостей P, а между ними одна плоскость P_σ, точки которой служатъ центрами винтовъ направленія (λ, μ, ν) и параметра p_σ. Замѣчая, что уравненіе 1)

$$x(p\lambda+\mu)+y(p\mu-\lambda)+zp\nu+\nu p_\sigma=o$$

удовлетворяется величинами

$$x=y=o,\quad z=-\frac{p_\sigma}{p},$$

мы заключаемъ:

Теорема LXII. Плоскости P_σ, соотвѣтствующія одинаковому параметру p_σ и различнымъ направленіямъ (λ, μ, ν) особыхъ винтовъ, проходятъ чрезъ опредѣленную точку Σ оси кинематическаго винта.

Точку Σ назовемъ *полюсомъ* параметра p_σ.

По данному полюсу σ легко построить плоскость P_σ, соотвѣтствующую данному направленію (λ, μ, ν). Для этого чрезъ σ проводимъ прямую σ (λ, μ, ν). Затѣмъ чрезъ ось кинематическаго винта проводимъ плоскость S, образующую съ плоскостью (z, σ) уголъ Z, cot'ъ котораго равенъ параметру кинематическаго винта. Плоскость R, проходящая чрезъ прямую σ и перпендикулярная къ плоскости (z, σ), встрѣтитъ плоскость S по нормали N къ искомой плоскости P_σ. Такъ какъ послѣдняя проходитъ чрезъ полюсъ σ, то она вполнѣ опредѣлена.

Положимъ, что прямая σ (λ, μ, ν) перпендикулярна къ оси z кинематическаго винта. Тогда плоскость R будетъ перпендикулярна къ z; слѣдовательно, и прямая N перпендикулярна къ z. Отсюда мы заключаемъ, что въ этомъ случаѣ P_σ проходитъ чрезъ z. Замѣчая, что

$$tg(\sigma, P_\sigma) = cot(\sigma, N)$$

и что въ данномъ случаѣ

$$\nu=o,$$

мы въ силу второй изъ формулъ 4) получаемъ:

$$tg(\sigma, P_\sigma)=p,$$

чѣмъ доказывается слѣдующая теорема:

Теорема LXIII. Если силовой винтъ (p_σ), ось котораго перпендикулярна къ оси кинематическаго винта (p), будетъ особымъ по отношенію къ послѣднему, то tg'ъ угла, образуемаго съ осью перваго винта плоскостью, проходящей чрезъ его центръ и ось втораго винта, равенъ параметру послѣдняго.

Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ плоскости P_σ, сопряженныя съ направленіями винтовъ p_σ, проходятъ чрезъ ось кинематическаго винта, а параметръ p_σ можетъ быть произвольнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ разсматриваемомъ случаѣ, уравненіе плоскости P_σ и условіе H'') принимаютъ видъ:

$$x(p\lambda+\mu)+y(p\mu-\lambda)=o,$$

это—уравненіе плоскости, проходящей чрезъ ось z, и въ него, дѣйствительно, параметръ p не входитъ:

Положимъ, что прямая σ (λ, μ, ν) совпадаетъ съ осью z. Плоскость (z, σ) въ этомъ случаѣ становится неопредѣленной. Но нормаль N вполнѣ опредѣляетя предыдущимъ построеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ данномъ случаѣ обѣ плоскости R и S проходятъ чрезъ Z и не совпадаютъ одна съ другой, такъ какъ одна изъ нихъ перпендикулярна къ плоскости (z, σ), а другая образуетъ съ послѣдней уголъ, отличный отъ прямого. Отсюда мы заключаемъ, что прямая N совпадаетъ съ z; слѣдовательно, P_σ перпендикулярна къ z. Замѣчая, что въ этомъ случаѣ P_σ есть центральная плоскость винта (p_σ), мы заключаемъ:

Теорема LXIV. Если силовой винтъ (p_σ), ось котораго параллельна оси кинематическаго винта, будетъ особымъ по

отношенію къ послѣднему, то разстояніе центральныхъ плоскостей обоихъ винтовъ равно (по абсолютной величинѣ) отношенію $\frac{p_\sigma}{p}$ параметровъ винтовъ.

Пусть A (ξ, η, ζ)—какая-нибудь точка пространства. Изслѣдуемъ распредѣленіе особыхъ винтовъ (p_σ) проходящихъ чрезъ A.

Уравненія оси σ винта имѣютъ видъ:

$$\frac{\xi-x}{\lambda}=\frac{\eta-y}{\mu}=\frac{\zeta-z}{\nu},$$

гдѣ x, y, z—координаты центра. Исключая λ, μ и ν между этими уравненіями и H'), находимъ:

$$8)\quad (\xi-x)(px-y)+(\eta-y)(py+x)+(\zeta-z)(pz+p\sigma)=o$$

что можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$8')\quad p(x^2+y^2+z^2)-x(p\xi+\eta)-y(p\eta-\xi)-z(p\zeta-p\sigma)=p\sigma\zeta.$$

Это уравненіе шаровой поверхности S_A. Замѣтимъ, кромѣ того, что поверхность S_σ проходитъ чрезъ A и точку: o, o, $-\frac{p_\sigma}{p}$, т. е., чрезъ полюсъ Σ параметра p_σ. Это прямо слѣдуетъ изъ уравненія 8). Мы получили, слѣдовательно, теорему:

Теорема LXV. Существуетъ безчисленное множество силовыхъ винтовъ параметра p_σ, проходящихъ чрезъ точку A и особыхъ по отношенію къ данному кинематическому винту (p). Центры этихъ винтовъ лежатъ на шаровой поверхности S_A, проходящей чрезъ A и полюсъ параметра p_σ.

Слѣдствіе. Особые винты равнаго параметра p_σ, центромъ которыхъ служитъ A, лежатъ въ плоскости (A), касательной въ A къ шару S_A.

Уравненіе плоскости A), очевидно, есть уравненіе (8), если мы въ послѣднемъ будемъ считать перемѣнными ξ, η и ζ, а постоянными x, y, z, которыя въ этомъ случаѣ слѣдуетъ разсматривать, какъ координаты точки A, принимаемой за центръ особаго винта.

Координаты α, β, γ центра шара S_A опредѣляются изъ формулъ:

$$9)\quad 2p\alpha = p\xi + \eta,\ 2p\beta = p\eta - \xi;\ 2p\gamma = p\zeta - p_\sigma.$$

Замѣчая, что α и β отъ p_σ и ζ не зависятъ, заключаемъ:

Теорема LXVI. Центры шаровъ S_A, соотвѣтствующихъ различнымъ параметрамъ p_σ, лежатъ на прямой L, параллельной оси кинематическаго винта (p). Прямыя L, соотвѣтствующія различнымъ точкамъ A прямой M, параллельной оси винта (p), совпадаютъ.

Слѣдствіе. По предыдущему, особые винты равнаго параметра p_σ, центръ которыхъ въ A, лежитъ въ плоскости (A), касательной къ шару S_A. На основаніи послѣдней теоремы заключаемъ:

Теоема LXVII. Плоскости (A), соотвѣтствующія различнымъ параметрамъ p_σ, обертываютъ прямую M_A, перпендикулярную въ A къ плоскости, проходящей чрезъ точку A и прямую L.

Эту прямую M_A назовемъ *осью* точки A. Ось M_A есть ось пучка плоскостей (A), въ каждой изъ которыхъ лежитъ бечисленное множество особыхъ винтовъ параметра p_σ, имѣющихъ центромъ точку A. Ось точки A на основаніи теоремы LXVI перпендикулярна къ оси кинематическаго винта (p). На основаніи той же теоремы заключаемъ:

Теорема LXVIII. Оси точекъ прямой, параллельной оси винта (p), параллельны между собой.

Такъ какъ ось M_A точки A лежитъ во всѣхъ плоскостяхъ (A), то, слѣдовательно, винтъ произвольнаго параметра,

ось котораго совпадаетъ съ M_A, а центромъ служитъ A, будетъ особымъ по отношенію къ кинематическому винту (p).

Пусть теперь (a)—какая-нибудь плоскость. На основаніи предыдущихъ изслѣдованій мы можемъ судить о распредѣленіи въ (a) особыхъ винтовъ даннаго параметра p_σ.

Такъ, центры параллельныхъ винтовъ лежатъ на прямой. Центры винтовъ пересѣкающихся въ одной и той же точкѣ A лежатъ на окружности, проходящей чрезъ A. Каждая точка A есть вообще центръ лишь одного винта. Только въ томъ случаѣ, когда ось точки A лежитъ въ (a), точка A есть центръ плоскаго пучка винтовъ равнаго параметра p_σ. Точку A въ этомъ случаѣ назовемъ *полюсомъ* плоскости (a) по отношенію къ параметру p_σ.

Легко доказать, что каждому параметру p_σ соотвѣтствуетъ въ (a) лишь одинъ полюсъ A. Для доказательства обратимся къ уравненію 8):

$$\alpha)\quad (\xi-x)(px-y)+(\eta-y)(py+x)+(\zeta-z)(pz+p\sigma)=0.$$

Выше было указано, что, если x, y, z—координаты центра A силоваго винта (p_σ), то это уравненіе представляетъ плоскость, въ которой лежатъ всѣ особые винты одного и того же параметра p_σ. Слѣдовательно, A—полюсъ плоскости α). Рѣшимъ обратный вопросъ. Дано уравненіе

$$\alpha')\quad A\xi+B\eta+C\zeta=D$$

плоскости α); требуется найти ея полюсъ A (x, y, z).

Для этого необходимо выразить, что уравненія α) и α') представляютъ одну и туже плоскость. Написавъ α) въ видѣ:

$$\xi(px-y)+\eta(py+x)+\zeta(pz+p\sigma)=p(x^2+y^2+z^2)+zp\sigma,$$

находимъ слѣдующія условія, при которыхъ точка (x, y, z)

будетъ полюсомъ плоскости α'):

$$\frac{px-y}{A}=\frac{py+x}{B}=\frac{pz+p\sigma}{C}=\frac{p(x^2+y^2+z^2)+zp\sigma}{D}$$

Но первыя три отношенія даютъ:

$$\frac{px-y}{A}=\frac{p(x^2+y^2+z^2)+zp\sigma}{Ax+By+Cz};$$

слѣдовательно,

$$Ax+By+Cz=D,$$

что само собой очевидно и могло быть написано сразу. Для опредѣленія точки x, y, z у насъ имѣются, слѣдовательно, уравненія:

$$\frac{px-y}{A}=\frac{py+x}{B}=\frac{pz+p\sigma}{C};\quad Ax+By+Cz=D.$$

Замѣчая, что эти уравненія первой степени, мы заключаемъ, что дѣйствительно, существуетъ лишь одинъ полюсъ A плоскости α) по отношенію къ данному параметру p_τ.

Между координатами (x, y, z) полюса имѣются два соотношенія

$$\frac{px-y}{A}=\frac{py+x}{B},\quad Ax+By+Cz=D,$$

не зависящія отъ параметра p_σ. Эти уравненія представляютъ прямую линію. Отсюда мы заключаемъ: полюсы плоскости α) по отношенію къ различнымъ параметрамъ лежатъ на прямой.

Этимъ мы заключимъ изслѣдованіе свойствъ силовыхъ винтовъ, по отношенію къ данному кинематическому винту. Это изслѣдованіе не можетъ претендовать на полноту и законченность, такъ какъ въ этомъ выпускѣ нашего труда мы имѣли

въ виду лишь коснуться соотношеній, существующихъ между винтами силовыми и кинематическими. Только въ четвертомъ выпускѣ, посвященномъ кинематикѣ и динамикѣ подобно-измѣняемой системы, мы будемъ имѣть возможность обрисовать эти соотношенія съ достаточно полнотой. Замѣчу лишь въ заключеніе, что свойства силовыхъ винтовъ, не производящихъ работы, значительно измѣняются при переходѣ отъ твердаго тѣла къ подобно-измѣняемой системѣ *).

1891 года 25-е Февраля.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ.

Poinsot. Éleménts de Statique. 8-me éd. Paris, 1842.

» Théorie nouvelle de la rotation des corps. Jour. de Liouville, 1851. T. XVI.

Ball. The Theory of screws. Dublin, 1876.

Chasles. Note sur les propriétes générales du système de deux corps semblables eutr'eux etc. Bulletin des sciences math. p. Férussac, Nov. 1830.

Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Berlin 1889. Въ этомъ сочиненіи обработана геометрическая сторона теоріи Баля. Авторъ, какъ и мы, занимается вопросомъ о геометрическомъ представленіи возможнаго коэффиціента двухъ винтовъ и даетъ два рѣшенія этого вопроса. (Kap. XX, S. 404 и 506). Эти рѣшенія гораздо сложнѣе предложеннаго нами (Вып. III, гл. V, стр. 50), поэтому Gravelius не могъ извлечь изъ нихъ никакихъ приложеній къ теоріи винтовъ, тогда какъ намъ изъ нашего рѣшенія удалось вывести всю теорію винтовъ.

Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte 1879—1880.

*) Ср. Ball. l. cit. Ch. II, § 13 и 14, Ch. III, § 22 и 23, Ch. IX, § 80.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

ГОМОЙОГРАФЪ.

Здѣсь помѣщу описаніе сложнаго циркуля, въ которомъ три точки движутся такъ, что треугольникъ, вершинами котораго служатъ эти точки, остается подобнымъ самому себѣ. Этотъ приборъ можно назвать гомойографомъ*).

Существенную часть гомойографа составляютъ два ромба $ABCD$ **и** $AEFG$ **(ч. 13), имѣющіе точку** A **общей вершиной. Вершины** B **и** D **перваго ромба соединены съ вершинами** E **и** G **втораго равными стержнями** BE **и** DG. **Кромѣ того, на** DG **построенъ треугольникъ** DGH, **въ которомъ**

$$AD=DH,\ AG=GH.$$

Докажемъ, что углы треугольника CFH **не измѣняются.**

Прежде всего замѣтимъ, что треугольники ABE **и** AGD **равны, откуда**

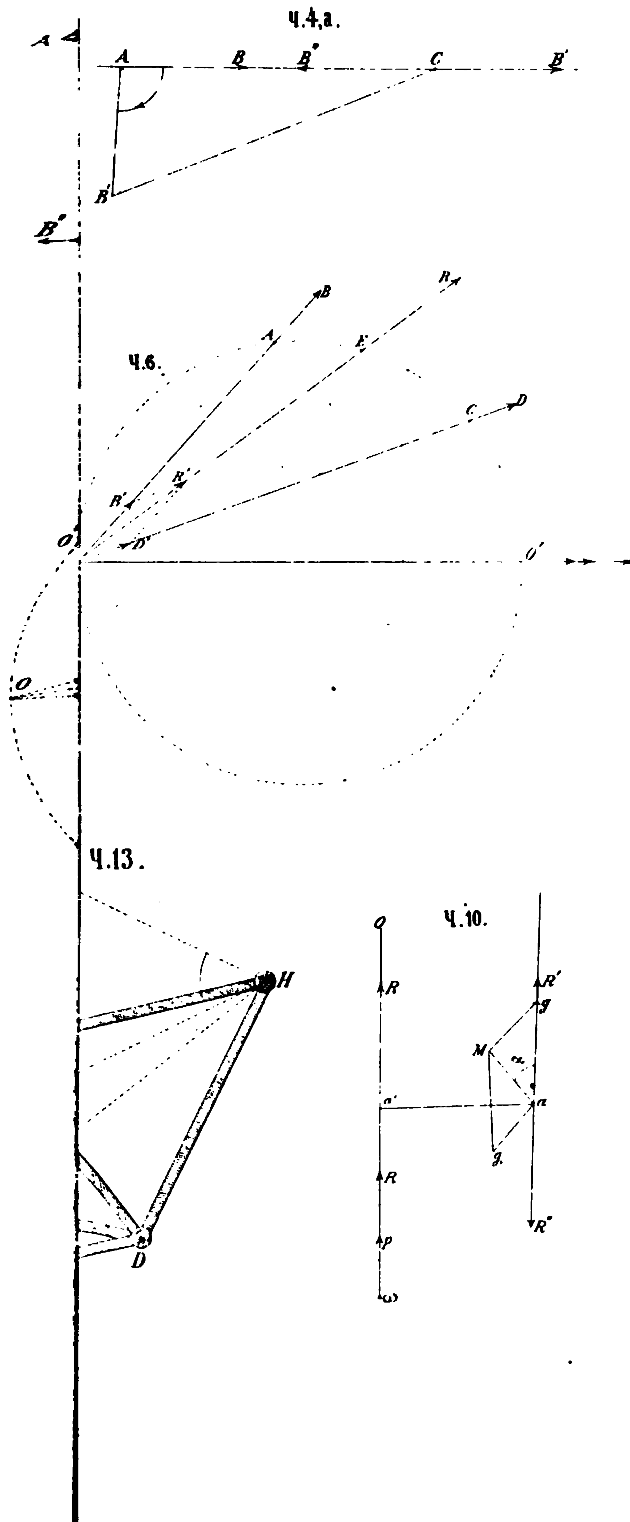
$$\alpha)\quad \angle BAE=\angle DAG.$$

Но въ ромбѣ $EAGF$ **діагональ** AF **есть равнодѣлящая угла** EAG. **Слѣдовательно, въ силу** α) AF **будетъ равнодѣ-**

) *Примѣчаніе.* Гомойографъ былъ мною построенъ въ 1887 году и тогда же его теорія была изложена на одномъ изъ засѣданій Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. *Авт.

лящей угла BAD. Но равнодѣлящей послѣдняго служитъ діагональ AC втораго ромба. Слѣдовательно, прямыя AC и AF совпадаютъ. Точка C во все время движенія остается на окружности, центръ которой въ D, такъ какъ стержни AD, CD и HD равны. Замѣчая, что хорда AH этой окружности не измѣняетя, заключаемъ, что и уголъ ACH также не измѣняется. Но точки A,C и F лежатъ на прямой, слѣдовательно, не мѣняется и уголъ FCH. Точно также не измѣняется уголъ CFH, такъ какъ точка F остается на окружности, центръ которой въ G, радіусами служатъ равные стержни AG, FG и GH, а неизмѣняемой хордой линія AH. Но, если въ треугольникѣ CFH остаются постоянными два угла, то и третій не измѣняется. Итакъ, дѣйствительно, въ описанномъ приборѣ измѣняемый треугольникъ CFH остается подобнымъ самому себѣ.

Одесса, Сентябрь 1887 годъ.


Ч.4,а.
Ч.6.
Ч.13.
Ч.10.

О сжимаемости ртути и стекла.

ОПЫТНОЕ ИЗСЛѢДОВАНІЕ

Г. Г. Де-Метца.

Recherches expérimentales de la compressibilité du mercure et du verre,

par G. De-Metz.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Задача, которую мы преслѣдуемъ въ настоящей работѣ, состоитъ въ опредѣленіи числовой величины коэффиціента абсолютной сжимаемости ртути. Съ этою цѣлью мы одновременно изслѣдовали ее по двумъ принятымъ въ наукѣ методамъ—Regnault и Jamin'a—и еще по третьей, которую легко установить, исходя изъ уравненій Lamé, данныхъ въ его «Leçons sur l'élasticité des corps solides» и въ седьмомъ мемуарѣ Regnault: «De la compressibilité des liquides, et en particulier de celle du mercure». Сопоставленіе полученныхъ такимъ образомъ трехъ рядовъ чиселъ приводитъ насъ къ убѣжденію, что метода Jamin'a не вполнѣ согласна съ требованіями теоріи упругости, и что она, въ другомъ только видѣ, заключаетъ въ себѣ недостатки старой методы Canton'a. Теорія упругости указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ путь, по которому можно перейти отъ коэффиціента сжимаемости, получаемаго по методѣ Jamin'a, къ истинному коэффиціенту сжимаемости, и тѣмъ самымъ рѣшаетъ вопросъ ясно и опредѣленно. Такимъ образомъ, наше изслѣдованіе заключаетъ въ себѣ данныя, на основаніи которыхъ мы

можемъ подтвердить справедливость теоретическихъ формулъ Lamé и объединить экспериментальныя методы Canton'а, Regnault и Jamin'а. Такъ какъ, однако, формулы Lamé въ ихъ общемъ видѣ требуютъ знанія двухъ коэффиціентовъ упругости піезометра, то мы посвятили этому вопросу отдѣльное изслѣдованіе, причемъ подвергли піезометрическія трубы гнутію и крученію. Оказалось, что разница между вычисленіями, произведенными по полнымъ формуламъ и по упрощеннымъ, заключается всего въ предѣлахъ ошибокъ опыта, вслѣдствіе чего мы считаемъ возможнымъ пользоваться послѣдними, лишь бы піезометры были приготовлены изъ стекла.

Это изслѣдованіе было задумано и отчасти уже выполнено до появленія работы M. Amagat, затрогивающей тотъ же вопросъ; хотя методы наши значительно разнятся между собою, тѣмъ не менѣе мы приходимъ къ тождественнымъ результатамъ, и оба высказываемся въ пользу теоріи упругости.

Настоящая статья заключаетъ въ себѣ три главы. Въ первой — въ историческомъ порядкѣ вкратцѣ изложены изслѣдованія по сжимаемости жидкостей, причемъ главное вниманіе обращено на развитіе методъ; во второй — заключены результаты опредѣленія кубической сжимаемости стекла и приведены числовыя значенія, характеризующія постоянную Poisson'а различныхъ твердыхъ тѣлъ. Въ третьей — помѣщены результаты собственныхъ нашихъ изслѣдованій сжимаемости ртути и стекла.

Это изслѣдованіе было произведено въ физической лабораторіи Императорскаго Новороссійскаго университета, и мы считаемъ своимъ пріятнѣйшимъ долгомъ выразить здѣсь нашу глубокую признательность завѣдывающему ею профессору Θеодору Никифоровичу Шведову, который не только любезно предоставилъ въ наше распоряженіе необходимые инструменты и матеріалы, но съ живѣйшимъ участіемъ относился къ успѣхамъ этой работы и не отказывалъ намъ въ своемъ совѣтѣ.

Одесса, 25 февраля 1891 года.

ГЛАВА I.

Историческій очеркъ.

1. Первыя изслѣдованія по сжимаемости жидкостей относятся къ началу XVII столѣтія, когда Bacon [1]), въ 1620 г., заключивъ воду въ полый свинцовый шаръ, запаялъ отверстіе и сплюснулъ его сначала ударомъ молота, а затѣмъ подъ прессомъ до просачиванія воды черезъ его стѣнки. Bacon вынесъ изъ этого опыта убѣжденіе, что вода сжимаема, хотя и въ очень слабой степени; свое заключеніе онъ основывалъ на томъ, что объемъ деформированнаго шара меньше начальнаго, стало быть, начальный объемъ жидкости уменьшился на величину сжимаемости воды.

Въ 1667 году, члены извѣстной академіи del Cimento [2]) занялись этимъ вопросомъ и сдѣлали цѣлый рядъ опытовъ, которые привели ихъ къ отрицательному результату.

Сначала они выдули большой шаръ изъ стеклянной трубки и наполнили его водою; къ свободному концу капиллярной трубки они припаяли другой резервуаръ, также наполненный водою, а соединительную капиллярную трубку изогнули. Погрузивъ шаръ въ тающій ледъ и подогрѣвъ резервуаръ, они раз-

---

[1]) Bacon. Novum organum. Lib. II, cap. XLV; см. Violle. Cours de physique. Tome I, Seconde partie. Paris, 1884, p. 513.

[2]) Saggi di naturali sperienze fatte nell'Accademia del Cimento; cap. V, Firenze, 1667.

считывали замѣтить пониженіе уровня въ капиллярѣ, такъ какъ пары воды подогрѣваемаго сосуда должны были производить значительное давленіе; однако, ихъ ожиданіе не оправдалось.

Такую неудачу легко объяснить самою постановкою опыта: приборъ академиковъ былъ въ сущности дистилляторомъ, и пары воды резервуара при охлажденіи у стѣнокъ холоднаго капилляра производили увеличеніе начальнаго объема жидкости. Если бы между шаромъ и резервуаромъ былъ слой масла или ртути, то они нашли бы искомое явленіе [1]).

2. Послѣ первой неудачи они произвели второй опытъ сжимаемости воды въ Маріоттовой трубкѣ при давленіи ртутнаго столба въ 9.6 атмосферъ, но искомаго явленія опять-таки не замѣтили.

3. Наконецъ, они изготовили серебряный шаръ, наполнили его водою и отверстіе наглухо завинтили гайкою. Когда они подвергли его сильному давленію, то вода стала просачиваться наружу, и стѣнки его покрылись росою. Этотъ рядъ попытокъ привелъ академиковъ del Cimento къ заключенію, что вода несжимаема, къ заключенію невѣрному и обратному тому, къ которому гораздо раньше пришелъ Bacon.

4. Мнѣніе о несжимаемости жидкостей господствовало цѣлое столѣтіе, пока, въ 1761 году, John Canton [2]) не взялся вновь за этотъ вопросъ. Ему удалось не только показать, что вода и нѣкоторыя другія жидкости сжимаемы, но ему хотѣлось даже исключить вліяніе деформаціи самого сосуда. Онъ поступалъ слѣдующимъ образомъ: приготовивъ сосудъ на подобіе большаго термометра, онъ точно опредѣлилъ отношеніе объема одного дѣленія капилляра къ объему всего шара; наполнилъ

---

[1]) Возможно, что въ приборѣ было недостаточное давленіе, такъ какъ въ сообщающихся сосудахъ съ различными температурами упругая сила пара равна давленію, соотвѣтствующему низшей температурѣ.

[2]) Canton. Phil. Trans., 1761 и 1762.

его изучаемою жидкостью, прокипятилъ послѣднюю, чтобы освободить ее отъ воздуха, и запаялъ капилляръ совершенно такъ, какъ поступаютъ при приготовленіи термометра. Подобный сосудъ онъ помѣстилъ подъ колоколъ воздушнаго насоса, въ верхней части котораго было высверлено отверстіе для того, чтобы запаянный конецъ капилляра можно было выдвинуть за предѣлъ безвоздушнаго пространства въ окружающій воздухъ. Давъ установиться температурѣ и замѣтивъ уровень жидкости въ капиллярѣ, онъ отламывалъ оконечность послѣдняго, вслѣдствіе чего уровень падалъ на θ дѣленій. Онъ считалъ, что наблюдаемое пониженіе есть сумма двухъ эффектовъ: сжимаемости жидкости и упругаго расширенія сосуда; чтобы исключить послѣднее, онъ впускалъ воздухъ подъ колоколъ насоса, вслѣдствіе чего уровень жидкости въ сосудѣ подпимался на θ' дѣленій. Canton полагалъ, что истинная сжимаемость жидкости

$$\chi_a = \frac{\theta - \theta'}{PW_0}, \tag{1}$$

гдѣ W_0 есть внутренній объемъ сосуда, а P—давленіе въ атмосферахъ.

Этою методою онъ нашелъ, что коэффиціентъ сжимаемости воды

$$\chi_a = 0.000046,$$

число довольно близкое къ установившемуся теперь въ наукѣ, хотя оно выражаетъ такъ называемую кажущуюся сжимаемость χ_a, а не абсолютную χ_v.

5. Опыты Canton'а прошли бы безслѣдно, если-бы въ 1819 г. за нихъ не взялся Jacob Perkins [1]), а въ 1823 г. извѣстный Oerstedt, изъ Копенгагена.

Perkins впервые даетъ названіе «піезометра» прибору, служащему для изученія сжимаемости жидкости, и его работы

[1]) Perkins. Phil. Trans., 1820.

интересны, какъ по значительности давленій, которымъ онъ подвергалъ жидкости, такъ и по разнообразію способовъ, которые онъ примѣнилъ къ рѣшенію вопроса; можно только пожалѣть, что они не отличались необходимою точностью. Онъ употреблялъ металлическіе піезометры, съ одного конца наглухо задѣланные, а съ другаго запертые цилиндрическимъ поршнемъ, ходившемъ на мягкомъ треніи въ кожанномъ кольцѣ (boîte à cuir); наполнивъ піезометръ водою и заперши его поршнемъ, онъ отмѣчалъ глубину погруженія поршня особымъ внѣшнимъ кожаннымъ кружкомъ, который на мягкомъ-же треніи скользилъ по внѣшней части поршня; въ началѣ опыта этотъ кружокъ плотно прилегалъ къ верхнему донышку сосуда. Затѣмъ онъ погружалъ піезометръ въ пушечный каналъ, также наполненный водою, закрывалъ всѣ отверстія, кромѣ того, черезъ которое передавалъ помпою давленіе внутрь канала, и производилъ сжатіе. Во время сжатія кружокъ перемѣщался по поршню на разстояніе, соотвѣтствовавшее величинѣ погруженія поршня. Зная всѣ размѣры сосуда и поршня, можно было опредѣлить сжимаемость воды, но, конечно, о большой точности результата здѣсь не могло быть и рѣчи.

Perkins придумалъ между прочимъ еще одинъ способъ доказательства и опредѣленія сжимаемости жидкостей, замѣнивъ измѣреніе объемовъ измѣреніемъ вѣсовъ. Онъ устроилъ цилиндрическій сосудъ, съ одной стороны закрытый наглухо, а съ другой—клапаномъ, открывавшимся внутрь его. Наполнивъ сосудъ водою, онъ взвѣшивалъ его и помѣщалъ въ пушечный каналъ. Подъ вліяніемъ большаго внѣшняго давленія и вслѣдствіе сжимаемости жидкости, клапанъ открывался внутрь, и часть жидкости переходила изъ пушечнаго канала въ сосудъ. Когда онъ его взвѣшивалъ вновь, то находилъ приращеніе вѣса. Изъ своихъ измѣреній Perkins нашелъ для воды

$$\chi_a = 0.000048$$ [1]).

[1]) Oerstedt, Ann. de chim. et de phys., 1823, t. 22, p. 196.

6. Болѣе точныя работы по интересующему насъ вопросу начались Oerstedt'омъ[1]), въ 1823 году. Подобно своимъ предшественникамъ, онъ также изучалъ сжимаемость воды, но только при малыхъ давленіяхъ отъ 0.33 до 6 атмосферъ и при одной и той же температурѣ. Приборъ его общеизвѣстенъ[2]); онъ употреблялъ первоначально латунный піезометръ съ весьма толстыми стѣнками, съ цѣлью избѣгнуть расширенія стѣнокъ (1823), а затѣмъ (1828)—стеклянный, свинцовый и оловянный; онъ прикрѣплялъ піезометръ къ латунной пластинкѣ, на которой помѣщалъ термометръ и воздушный манометръ. Приготовленный такимъ образомъ піезометръ погружался въ крѣпкій стеклянной цилиндръ, запаянный съ одного конца, а съ другаго оканчивавшійся металлическою оправою и водяною помпою. Цилиндръ былъ наполненъ водою, и чтобы она не смѣшивалась съ испытуемою водою піезометра, Oerstedt въ видѣ индекса впускалъ каплю ртути въ его капилляръ. Отсюда видно, что Oerstedt, подобно Perkins'y, производилъ одновременно внутреннее и внѣшнее сжатіе и опредѣлялъ, слѣдовательно, кажущуюся сжимаемость жидкости

$$\chi_a = \frac{\theta''}{PW_0}, \qquad (2)$$

гдѣ θ'' есть кажущееся уменьшеніе первоначальнаго объема піезометра W_0 при двухстороннемъ давленіи P. Согласно воззрѣнію Lamé, между величинами θ и θ', наблюденными Canton'омъ, и величиною θ'', наблюденною Perkins'омъ и Oerstedt'омъ, существуетъ связь,

$$\theta' + \theta'' = \theta, \qquad (3)$$

---

[1]) Oerstedt. Ann. de chim. et de phys., t. 21, 1822, p. 99; t. 22, 1823, p. 192; t. 38, 1828, p. 326.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de physique. Tome I, fasc. II, 1882, p. 121,

которая позволяетъ намъ вникнуть въ смыслъ ихъ измѣреній, а именно, что этими, на первый взглядъ, разными пріемами всѣ они измѣряли лишь кажущуюся сжимаемость χ_a и вовсе не исправляли своихъ результатовъ на кубическую сжимаемость k стѣнокъ піэзометра. Изъ своихъ измѣреній Oerstedt нашелъ, что сжимаемость воды [1])

$$\chi_a = 0.000045$$

и показалъ, что она постоянна въ предѣлахъ давленій отъ 0.33 до 6 атмосферъ.

Oerstedt полагалъ, что кажущаяся сжимаемость χ_a близка къ дѣйствительной χ_v, если производить опыты съ тонко-стѣннымъ сосудомъ и подвергать его одновременно внутреннему и внѣшнему сжатію. Чтобы подтвердить эту мысль, онъ измѣрялъ сжимаемость воды въ стеклянномъ и свинцовомъ піэзометрахъ; найдя изъ этихъ опытовъ одно и то же число для коэффиціента сжимаемости воды, онъ считалъ свою мысль доказанной, а выводы теоріи упругости опровергнутыми [2]). Согласно дальнѣйшему развитію этого вопроса можно предположить, что измѣренія Oerstedt'а не были настолько точны, чтобы обнаружить разницу между кубическою сжимаемостью k стекла и свинца, разницу весьма малую по своей абсолютной величинѣ, такъ какъ

$$\text{стекло} \quad k = 0.0000020,$$

$$\text{свинецъ} \quad k = 0.0000059.$$

7. Despretz[3]), въ 1823 году, внесъ нѣкоторыя улучшенія въ экспериментальную сторону этого вопроса, замѣнивъ въ воз-

---

[1]) Oerstedt. Ann. de chim. et de phys., 1823, t. 22, p. 196.

[2]) Violle. Loc. cit., p. 519.

[3]) Despretz. C. R. XXI, 1845, Note sur des expériences exécutées en 1823.

душномъ манометрѣ воду—ртутью и ртутный индексъ надъ водою въ капиллярѣ піезометра—воздухомъ. Кромѣ того, онъ погружалъ піезометръ въ ванну постоянной температуры, но зато, подобно своимъ предшественникамъ, игнорировалъ поправку на деформацію стѣнокъ. Онъ доказывалъ, что сжимаемость не пропорціональна давленію, но это утвержденіе впослѣдствіи не оправдалось въ предѣлахъ его же давленій.

8. Въ 1837 году, Colladon et Sturm[1]), изъ Женевы, предприняли новую большую работу, посвященную сжимаемости жидкостей, причемъ интересно то обстоятельство, что они значительно приблизились къ истинному опредѣленію деформаціи піезометра. Съ этою цѣлью они опредѣлили коэффиціентъ линейнаго растяженія стекляннаго стержня и нашли, что $\alpha = 0.0000011$. Отсюда они выводили величину кубической сжимаемости піезометра k, положивъ

$$k = 3\alpha = 0.0000033, \tag{4}$$

что, однако, не вѣрно, такъ какъ, согласно теоріи упругости,

$$k = 3\alpha(1 - 2\sigma), \tag{5}$$

гдѣ σ есть отношеніе поперечнаго сокращенія β къ линейному растяженію α. Положивъ, согласно Poisson'у, $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma = 0.25$ для всякаго изотропнаго тѣла, находимъ

$$k = \frac{3\alpha}{2} = 0.00000165. \tag{6}$$

Что касается ихъ методы, то она цѣликомъ была заимствована у Oersted'а, съ тою лишь разницею, что ихъ манометръ былъ

---

[1]) Colladon et Sturm. Ann. de chim. et de phys., t. 36, 1827, pp. 113—159 и pp. 225—257.

воздушно-ртутный, и піезометръ погружался въ ванну постоянной температуры. Эта работа по своимъ достоинствамъ выдѣляется изъ ряда только что поименованныхъ, за что и была удостоена преміи Парижской Академіи Наукъ въ 1837 году.

Они нашли, что кажущаяся сжимаемость воды

$$\chi_a=0.000048 \text{ при } 0^\circ,$$

а истинная

$$\chi_a=0.0000513 \text{ при } 0^\circ.$$

Это число слишкомъ велико, такъ какъ k было ими вычислено невѣрно; если-же взять

$$k=0.00000165,$$

то

$$\chi_v=0.0000496 \text{ при } 0^\circ.$$

Меня особенно интересуетъ работа Colladon et Sturm'a, потому-что они первые опредѣляли сжимаемость ртути и нашли:

$$\chi_a=0.00000173 \text{ при } 0^\circ,$$

откуда

$$\chi_v=0.00000503 \text{ при } 0^\circ \text{ и } k=3\alpha,$$

а въ дѣйствительности

$$\chi_v=0.00000338 \text{ при } 0^\circ \text{ и } k=\frac{3\alpha}{2}.$$

Относительно числа $\chi_a=0.00000173$ слѣдуетъ замѣтить, что оно вычислено Colladon et Sturm'омъ только изъ большихъ давленій. Я передѣлалъ вычисленія ихъ опытовъ по таблицамъ pp. 137—138 ихъ мемуара и нашелъ болѣе точное число

$$\chi_a=0.00000187 \text{ при } 0^\circ,$$

и тогда

$$\chi_v=0.00000517 \text{ при } 0^\circ \text{ и } k=3\alpha,$$

или

$$\chi_v=0.00000352 \text{ при } 0^\circ \text{ и } k=\frac{3\alpha}{2}.$$

Послѣднее число тождественно съ числомъ Regnault

$$\chi_v = 0.00000352,$$

равно какъ и коэффиціентъ сжимаемости воды

$$\chi_v = 0.0000496$$

очень близокъ къ тому же коэффиціенту Grassi

$$\chi_v = 0.0000502.$$

Приведенныхъ сравненій вполнѣ достаточно, чтобы указать на степень точности наблюденій Colladon et Sturm'a. Остается пожалѣть, что многочисленный матеріалъ ихъ наблюденій, обнимающій: ртуть при 0°, воду безъ воздуха при 0°, воду съ воздухомъ при 0°, алкоголь, сѣрный эѳиръ, насыщенный растворъ аммiака, эѳиры: азотной, уксусной, хлористоводородной кислотъ; уксусную кислоту, сѣрную концент. кислоту, азотную кислоту, терпентинъ,—забытъ въ настоящее время; они оперировали съ давленіями до 40 атмосферъ и нашли, что сжимаемость воды пропорціональна давленію.

9. Въ 1843 году, Aimé[1]) предпринялъ рядъ опытовъ, основанныхъ на особомъ пріемѣ вычисленія сжимаемости жидкаго тѣла, хотя піезометръ по прежнему подвергался одновременно внутреннему и внѣшнему давленіямъ, которыя получались при погруженіи его въ море на значительную глубину. Своему піезометру Aimé далъ названіе appareil à déversement; онъ состоялъ изъ стекляной камеры *a*, къ которой съ одной стороны была припаяна изогнутая капиллярная трубка *bc*, какъ показано на фиг. 1-й. Передъ наполненіемъ камеры *a* изучаемою жидкостью конецъ ея *d* былъ открытъ, и черезъ него происходило наполненіе жидкостью, послѣ чего конецъ *d* запаивался.

---

[1]) Aimé. Ann. de chim. et de phys., 1843, (3) t. 8, p. 257.

Другой открытый конецъ c служилъ для наполненія капилляра bc ртутью и для передачи давленія внутрь камеры. Когда жидкость сжималась, то въ камеру a изливалась часть ртути изъ трубки bc, и объемъ влившейся ртути представлялъ въ точности сжатіе заключенной въ камерѣ a жидкости. Вычисленіе коэффиціента сжимаемости Aimé сводилъ на расширеніе жидкости, причемъ поступалъ слѣдующимъ образомъ. Онъ опредѣлялъ прежде всего температуру камеры a, при которой ртуть капилляра bc касалась оконечности его b, положимъ 15° C., наносилъ на трубкѣ bc произвольную черточку h и погружалъ камеру a въ теплую ванну такой температуры, положимъ 30°C., чтобы жидкость, заключенная въ камерѣ, расширившись, оттолкнула уровень ртути отъ b до h. Опустивъ этотъ приборъ въ море, онъ замѣчалъ, что подъ вліяніемъ давленія часть ртути вливалась въ камеру a, потому что послѣ извлеченія его изъ воды уровень при 15° C. уже не приходился въ точкѣ b, а стоялъ нѣсколько ниже, у точки g. Чтобы свести задачу сжимаемости жидкости на задачу расширенія, онъ опредѣлялъ вновь ту температуру, при которой уровень ртути переходилъ отъ точки g до штриха h; эта температура, очевидно, должна была быть теперь меньше 30° C., положимъ 22° C. Отсюда легко вычислить, какому числу градусовъ C соотвѣтствовало данное сжатіе; именно сжатіе $bg=bh-gh$; но bh эквивалентно расширенію (30°—15°), а gh—(22°—15°), слѣдовательно, искомое сжатіе выразится расширеніемъ числа градусовъ

$$(30^\circ-15^\circ)-(22^\circ-15^\circ)=bg. \qquad (7)$$

При этомъ мы предполагали, что температура моря была 15° C., а если бы она была 12°.6, какъ въ опытахъ Aimé, то приведенное число градусовъ нужно было бы уменьшить на (15°—12°.6), такъ что вообще

$$bg=(30-15^\circ)-(22-15^\circ)-(15^\circ-12.6),$$

или проще

$$bg = (30^\circ - 15^\circ) - (22^\circ - 12^\circ.6) = 5^\circ.6\ C. \qquad (7')$$

За единицу объема онъ принималъ объемъ камеры при 12°. 6 С., а давленіе въ его опытахъ мѣнялось отъ 86 атм. до 220 атм. Онъ воспользовался изслѣдованіемъ Colladon et Sturm'а, чтобы поправить свои наблюденія на кубическую сжимаемость стекла, причемъ впервые вычислилъ k по формулѣ теоріи упругости; онъ положилъ $k = 0.00000165$; противъ этого числа, однако, можно возразить, такъ какъ неизвѣстно—обладало-ли стекло Colladon et Sturm'а тѣми-же упругими свойствами. Онъ изучилъ сжимаемость: воды, алкоголя 32%, 40%; кислотъ: щавелевой, уксусной, сѣрной, хлористо-водородной, раствора амміака, морской воды, сѣрно-кислаго натрія, нефти, терпентина, ртути. Сообщу коэффиціенты сжимаемости, найденные имъ для воды и ртути:

вода $\chi_v = 0.0000502$ при 12°. 6 С.,

ртуть $\chi_v = 0.0000040$ при 12°. 6 С.;

послѣднее число получено изъ 3-хъ опытовъ, въ которыхъ давленіе мѣнялось въ предѣлахъ 97, 160, 112 атм.

10. Въ 1847 году, по тому же вопросу опубликовалъ работу Regnault, отнесшійся къ дѣлу со свойственными ему обстоятельностью и точностью. Онъ изучилъ всего двѣ жидкости: воду и ртуть, но самые опыты были предприняты съ цѣлью провѣрить формулы теоріи упругости, основанной на нѣкоторыхъ гипотезахъ относительно взаимодѣйствія молекулъ однороднаго и изотропнаго твердаго тѣла. Главнымъ образомъ, его интересовалъ вопросъ непосредственнаго опредѣленія кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра k, а не косвеннаго, какъ напримѣръ изъ вытяженія сплошнаго стержня, хотя бы изготовленнаго одновременно и изъ той же самой массы, изъ которой и труба піезометра.

Regnault не считалъ даже строгимъ опредѣленіе коэффиціента k, сдѣланное изъ предварительныхъ опытовъ съ трубою, которая служила затѣмъ для приготовленія піезометра, такъ какъ, по его мнѣнію, необходимо допустить совершенную однородность стекляной массы, чтобы дальнѣйшая обработка трубы не нарушила первоначальнаго ея упругаго состоянія. Онъ приводитъ далѣе рядъ чиселъ, характеризующихъ Юнговъ модуль стекла, и оказывается, что значенія его колеблются между

$$E=10000\frac{kgr}{mm^2} \quad \text{и} \quad E=5477\frac{kgr}{mm^2},$$

соотвѣтственно чему колебанія коэффиціента растяженія α происходятъ (на 1 атм.) въ предѣлахъ

$$\alpha=10.3\times10^{-7} \quad \text{и} \quad \alpha=18.8\times10^{-7},$$

а коэффиціентовъ $k=\frac{3\alpha}{2}$ въ предѣлахъ

$$k=15.4\times10^{-7} \quad \text{и} \quad k=28.2\times10^{-7}.$$

Эти числа ясно указываютъ на то, что различныя стекла обладаютъ различными упругими свойствами, и что, слѣдовательно, матеріалъ каждаго піезометра долженъ изучаться индивидуально.

Съ этою цѣлью Regnault предложилъ свою методу, согласно которой наблюдатель опредѣляетъ кажущуюся сжимаемость жидкости χ_a по видимому пониженію уровня жидкости въ капиллярѣ піезометра θ'', подвергаемому внутреннему и внѣшнему одновременному сжатію; а затѣмъ къ этой величинѣ χ_a

---

[1]) Regnault. Relation des expériences.... Mémoires de l'Institut de France. Tome XXI, 1847, p. 429—464.

придаетъ кубическую сжимаемость стѣнокъ піезометра k, такъ что истинная сжимаемость

$$\chi_v = \chi_a + k. \tag{8}$$

Величину k Regnault опредѣлялъ помощью слѣдущаго простаго опыта: онъ подвергалъ піезометръ одному внѣшнему давленію, подобно Canton'у, отчего уровень жидкости въ капиллярѣ піезометра поднимался на θ' дѣленій. По величинѣ θ' легко опредѣлить кубическую сжимаемость k, на основаніи формулъ, которыя Lamé[1]), по просьбѣ Regnault, вывелъ для полаго цилиндра съ плоскими основаніями, для шара и для цилиндра съ полусферическими основаніями. Эти формулы будутъ мною выведены въ другомъ мѣстѣ настоящаго изслѣдованія, пока замѣчу только, что онѣ требуютъ тождества

$$\theta = \theta' + \theta'', \tag{3}$$

въ которомъ θ есть видимое пониженіе жидкости въ капиллярѣ піезометра при одномъ внутреннемъ давленіи, а θ и θ'' суть уже извѣстныя намъ перемѣщенія жидкости. Это тождество въ опытахъ Regnault всегда было провѣряемо, и оно вполнѣ подтвердилось. Однако, относительно формулъ Lamé слѣдуетъ замѣтить, что онѣ выведены въ предположеніи справедливости закона Poisson'а, предположеніи, которое впослѣдствіи не оправдалось.

Regnault имѣлъ слѣдующіе піезометры при изученіи воды: шаръ красной мѣди, латунный шаръ и стеклянный цилиндръ съ полусферическими основаніями; при изученіи ртути только стеклянный. Давленіе онъ мѣнялъ отъ 2 до 10 атмосферъ и производилъ опыты, вѣроятно, при комнатной температурѣ, такъ какъ никакихъ указаній на этотъ счетъ въ его мемуарѣ нѣтъ. Онъ нашелъ слѣдующія числа для истинной сжимаемости воды.

---

[1]) Regnault. Mémoires de l'Institut de France. Tome XXI, 1847, p. 438—442.

Піезометръ красной мѣди $\chi_v = 0.00004771$

Піезометръ латунный $\chi_v = 0.00004829$

Піезометръ стеклянный $\chi_v = 0.00004668$.

Хотя эти числа довольно близки между собою, однако, Regnault не считаетъ этого согласія достаточнымъ для оправданія теоріи. Мнѣ кажется, что ему можно сдѣлать серьезное возраженіе — не объясняется-ли прежде всего эта разница разностью температуръ, при которыхъ имѣли мѣсто его опыты, такъ какъ изъ позднѣйшихъ измѣреній Grassi и другихъ лицъ стало извѣстнымъ, что въ предѣлахъ отъ 10°.8 C. до 17° C., т. е. въ предѣлахъ колебаній комнатной температуры, сжимаемость воды измѣняется отъ $\chi_v = 0.000048$ до $\chi_v = 0.000046$. Хотя съ другой стороны, дѣйствительно, часть ошибокъ можно отнести на счетъ формулъ Lamé, основанныхъ на невѣрномъ законѣ Poisson'a; именно, новѣйшія изслѣдованія [1] даютъ Poisson'овской постоянной значеніе

$\sigma = 0.330$ для латуни

$\sigma = 0.335$ для мѣди

$\sigma = 0.235$ для стекла.

Поправивъ формулы на новое значеніе σ, можно нѣсколько (на 0.0000005) приблизить коэффиціенты истинной сжимаемости воды въ мѣдномъ и латунномъ шарахъ къ коэффиціенту истинной сжимаемости въ стеклянномъ піезометрѣ.

Ртуть была изслѣдована Regnault только въ одномъ стеклянномъ піезометрѣ, въ томъ же самомъ, который служилъ для воды, и получилось число

$$\chi_v = 0.00000352,$$

---

[1]) См. таблицу постоянныхъ Poisson'a, гл. II.

которое Grassi относитъ, вѣроятно со словъ Regnault, къ 0°. Это число совершенно тождественно съ числомъ Colladon et Sturm'a, поправленнымъ мною.

11. Въ 1851 году, Grassi[1]) опубликовалъ большую работу по сжимаемости различныхъ жидкостей. Въ его работѣ, въ смыслѣ методы, новаго нѣтъ ничего, такъ какъ онъ продолжалъ, по порученію Regnault, работу Regnault. Только вмѣсто формулъ Lamé, основанныхъ на законѣ Poisson'a, онъ употреблялъ формулы Wertheim'a[2]), отличающіяся отъ предъидущихъ тѣмъ, что Wertheim на основаніи своихъ весьма разнообразныхъ опытовъ считаетъ $\sigma=0.33$. Grassi употреблялъ только стеклянные піезометры, числомъ 5; давленія его не превышали 10 атмосферъ.

Наиболѣе обстоятельно Grassi изслѣдовалъ сжимаемость воды въ зависимости отъ давленія и температуры, причемъ нашелъ, что сжимаемость ея возрастаетъ съ паденіемъ температуры, именно въ одномъ и томъ же піезометрѣ A

$$\chi_v=0.0000502 \text{ при } 0^\circ,$$

$$\chi_v=0.0000455 \text{ при } 25.9^\circ \text{ C.},$$

$$\chi_v=0.0000440 \text{ при } 53.3^\circ \text{ C.}$$

Кромѣ воды, Grassi изслѣдовалъ: обыкновенный эѳиръ, абсолютный алкоголь, древесный спиртъ, хлороформъ, растворы хлористаго кальція, хлористаго натрія, іодистаго калія, азотнокислаго натрія, углекислаго натрія, искусственную морскую воду, растворы сѣрной кислоты. Изъ нихъ сжимаемость алкоголя, эѳира и хлороформа возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры.

---

[1]) Grassi. Ann. de chim. et de phys., (3) 31, 1851, p. 437—478.

[2]) Wertheim. Ann. de chim. et de phys., (3) t. 23, 1848, p. 52.

Я долженъ здѣсь возстановить одно недоразумѣніе, состоящее въ томъ, что иногда приписываютъ Grassi опредѣленіе коэффиціента сжимаемости ртути

$$\chi_v = 0.00000295 \text{ при } 0^\circ,$$

однако, самъ Grassi никогда подобныхъ опредѣленій не дѣлалъ, а перечислилъ только опыты Regnault по формуламъ Wertheim'a.

12. Въ 1868 году, вопросъ вступилъ въ новую фазу, такъ какъ Jamin предложилъ, на первый взглядъ, совершенно иную опытную методу для изслѣдованія сжимаемости жидкихъ тѣлъ. Онъ стремился свести всѣ измѣренія къ одному только опыту, чтобы вовсе не имѣть соприкосновенія съ теоріей, которая, во-первыхъ, какъ мы видѣли, требуетъ знанія для каждаго піезометра постоянной Poisson'a, а во вторыхъ—извѣстныхъ представленій о молекулярномъ строеніи твердаго тѣла. Съ этою цѣлью, онъ предложилъ сжимать жидкость только одностороннимъ внутреннимъ давленіемъ, отчего въ капиллярѣ піезометра уровень жидкости падалъ на θ. Послѣднее перемѣщеніе можно разсматривать какъ совокупность двухъ эффектовъ: абсолютной сжимаемости жидкости χ_v и упругаго расширенія піезометра θ_0, т. е.

$$\theta = \chi_v + \theta_0; \tag{9}$$

слѣдовательно, для опредѣленія χ_v необходимо имѣть опытную величину θ_0. Для этого Jamin заключилъ піезометръ въ закрытый сосудъ, наполненный ртутью и оканчивавшійся вверху капиллярною трубкою, названною имъ — поправочною — «tube correcteur». При расширеніи стѣнокъ піезометра уровень ртути въ поправочной трубкѣ перемѣщается въ сторону кажущагося возрастанія внѣшняго объема; назовемъ это перемѣщеніе γ. Тогда, согласно Jamin'у, слѣдуетъ написать:

---

[1]) Jamin. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 66, 1868, p. 1104.

$$\theta = \chi_v + \gamma, \tag{10}$$

откуда

$$\chi_v = \theta - \gamma. \tag{11}$$

Изъ только что сказаннаго ясно, что χ_v опредѣляется исключительно изъ опыта, но вопросъ только въ томъ, справедливо-ли равенство

$$\theta_0 = \gamma ? \tag{12}$$

Какъ мы увидимъ впослѣдствіи [1]), Jamin въ этомъ предположеніи ошибся, ибо θ_0 не равняется γ, что легко доказать, исходя изъ уравненій теоріи упругости и подтвердить опытомъ справедливость послѣдняго заключенія. Небезъинтерссно будетъ замѣтить, что кажущаяся простота методы Jamin'а подкупала въ ея пользу, и если-бы опыты съ сжимаемостью ртути не привели къ числу

$$\chi_v = 0.00000187 \text{ при } 15^\circ \text{ C.},$$

отличающемуся на половину отъ чиселъ Colladon et Sturm'a, Aimé и Regnault, то она, вѣроятно, удержалась-бы прочно на своемъ мѣстѣ.

13. Найдя методу, Jamin поручилъ Amaury et Descamps[2]) произвести помощью ея изслѣдованіе. Опытное выполненіе соотвѣтствовало теоретической простотѣ, и авторы не только не опредѣлили постоянныхъ упругости своихъ піезометровъ, но даже не упомянули о качествѣ стекла — обыкновенное-ли оно, или-же хрустальное; кромѣ окончательныхъ чиселъ, они не сообщили никакихъ необходимыхъ подробностей, которыя позволяли-бы судить о достоинствахъ и недостаткахъ методы. Я полагаю, что въ этомъ обстоятельствѣ можно искать объясненія того факта, что эта метода осталась въ теченіи послѣднихъ

---

[1]) См. главу III, §§ 13 и 14.

[2]) Amaury et Descamps. Comptes rendus. T. 68, 1869, p. 1564.

двадцати лѣтъ безъ приложенія и дальнѣйшей разработки. Descamps [1]) приводитъ слѣдующій рядъ тѣлъ, изслѣдованныхъ имъ самимъ и Amaury:

вода $\chi_v = 0.0000490$ при 0° С.

вода $\chi_v = 0.0000440$ при 25° С.

ртуть $\chi_v = 0.00000187$ при 15° С.,

кромѣ того еще 15 жидкостей: растворъ амміака, хлористо-водородная кислота, растворъ хлористаго аммонія, растворы хлористаго калія (5%, 10%, 15%, 20%, 25%, 30%), уксусная кристаллизующаяся кислота, алкоголь метиловый, алкоголь безводный, алкоголь 90°, алкоголь амиловый, чистый сѣрнистый углеродъ, эссенціи терпентина, лимонныя эссенціи, кристаллизующійся бензинъ, хлороформъ, сѣрный эѳиръ [2]).

14. Въ недавнее время появились въ печати замѣчанія противъ этой методы. Schumann [3]) справедливо указывалъ на ея необработанность въ экспериментальномъ отношеніи, такъ какъ Amaury et Descamps не привели достаточныхъ данныхъ для сужденія о ея точности, а Ch. Ed. Guillaume [4]) доказывалъ, что коэффиціентъ

$$\chi_v = \theta - \gamma \qquad (11)$$

слишкомъ малъ, и именно на величину кубической сжимаемости стѣнокъ деформированнаго сосуда k, т. е.

$$\chi_v = \theta - \gamma + k. \qquad (13)$$

---

[1]) Descamps. Étude de la compressibilité des liquides. Thèses de doctorat. Paris, 1872, p. 1—35.

[2]) Ibidem, p. 24.

[3]) Schumann. Wied. Ann., Bd. 31, p. 15, 1887.

[4]) Ch. Ed. Guillaume. Archives des sciences physiques. (3) T. 17, 1887, p. 155 и p. 177.

Принявъ для k величину

$$k=0.00000211,$$

Guillaume [1]) исправилъ коэффиціенты сжимаемости ртути и воды:

$$\text{ртуть} \quad \chi_r=0.0000039 \text{ при } 15^\circ \text{ C.},$$

$$\text{вода} \left\{ \begin{array}{l} \chi_v=0.0000504 \text{ при } 0^\circ, \\ \chi_v=0.0000454 \text{ при } 25^\circ. \end{array} \right.$$

15. Въ позапрошломъ году, я [2]) произвелъ по этой методѣ изслѣдованіе сжимаемости нѣкоторыхъ маселъ и коллоидовъ и опубликовалъ полученные мною результаты. Такъ какъ въ то время я былъ занятъ не столько теоретическою постановкою вопроса, сколько полученіемъ ряда чиселъ для выясненія связи между упругостью названныхъ жидкостей и оптическимъ эффектомъ проф. A. Kundt'a [3]), то и я не изслѣдовалъ упругихъ свойствъ своихъ піезометровъ, а удовлетворился тѣмъ, что получилъ для воды

$$\left. \begin{array}{l} \chi_v= 0.00004766 \text{ піезометръ } A \\ \chi_v= 0.00004720 \text{ піезометръ } B \end{array} \right\} \text{ при } t=12^\circ.58 \text{ C.}$$

Для той-же температуры Grassi [4]) далъ

$$\chi_v = 0.00004779,$$

---

1) Ibidem, p. 189.

2) Г. Де-Метцъ. Опытное изслѣдованіе механическихъ свойствъ маселъ и коллоидовъ. Записки Мат. отд. Новорос. Общ. Еств., т. 9, стр. 139, 1889. Тоже короче: Труды VIII съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей. Спб. 1890, отдѣлъ II, стр. 42 и Wied. Ann., Bd. 41, 1890, p. 663.

3) Kundt. Wied. Ann., Bd. 13, 1881, p. 110.

4) Grassi, loc. cit., p. 477.

Röntgen und Schneider[1])

$$\chi_v = 0.00004735.$$

Кромѣ воды, я изучилъ сжимаемость маселъ: рициннаго, льнянаго, рыбьяго жира, миндальнаго, оливковаго, оливковаго съ примѣсью 5.5% и 6.9% жидкаго параффина, оливковаго съ бензоломъ (пополамъ); коллоидовъ: студенистой желатины, гумми аравійскаго въ водѣ, нестуденистой желатины, канадскаго бальзама въ бензолѣ, коллодіума duplex; жидкаго параффина, кристаллизующагося бензола, глицерина, раствора метафосфорной кислоты въ водѣ, раствора сахара въ водѣ и жидкаго стекла (Natronwasserglas). Давленіе не превосходило 9.5 атмосферъ, а температуры колебались около 12°—15° С.

Я старался рядомъ чиселъ оправдать методу Jamin'а; имѣя значительный рядъ чиселъ, характеризующій показанія поправочной трубы, я составилъ изъ нихъ слѣдующую таблицу[2]):

Колебанія показаній γ_1 и γ_2 поправочной трубки.

	$\gamma_1 m.m^3$	M. F.	W. F.	$\gamma_2 m.m.^3$	M. F.	W. F.
Піезометръ A	7.613	0.124	0.084	7.668	0.137	0.089
» B	7.059	0.119	0.080	7.076	0.125	0.084

Здѣсь γ_1 и γ_2 представляютъ показанія при возрастаніи давленія отъ 0 до 9.5 атм. (γ_1) и при паденіи давленія отъ 9.5 до 0 атм. (γ_2). Числа этой таблицы, равно какъ и все изслѣдованіе, произведенное этою методою, привело меня къ за-

[1]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann., Bd. 33, p. 660, 1888.

[2]) G. de-Metz. Wied. Ann. Bd. 41, p. 663, 1890.

ключенію, что для сильно сжимающихся жидкостей, она даетъ числа постоянныя и весьма близкія къ принимаемымъ за истинныя. Это согласіе должно, впрочемъ, вытекать изъ замѣчанія Guillaume'a, который предлагаетъ увеличивать коэффиціенты сжимаемости жидкости, полученные по методѣ Jamin'a, на величину кубической сжимаемости стекла k. Если остановиться на значеніи k=0.0000021, то по отношенію къ водѣ ошибка выразится 4%, по отношенію къ алкоголю 2%, а по отношенію къ сѣрнистому эѳиру всего 1.3%. Принимая во вниманіе простоту методы, этимъ результатомъ во многихъ случаяхъ можно удовлетвориться.

16. Въ 1872 году, появилась работа Cailletet [1]), особенность которой заключается въ употребленіи необыкновенно большихъ давленій, до 705 атмосферъ, измѣрявшихся манометромъ Deshoffe'a.

Опытъ производился въ слѣдующей формѣ: въ стальной сосудъ, налитый ртутью, въ которомъ при насосѣ Cailletet [2]) обыкновенно помѣщаютъ трубки съ сжимаемымъ газомъ, онъ вставлялъ стеклянный піезометръ такъ, чтобы, при сжатіи наполнявшей его жидкости, ртуть могла подниматься внутрь піезометра по вызолоченной трубкѣ. Измѣреніе кажущагося уменьшенія объема Cailletet производилъ особымъ пріемомъ, основаннымъ на разложеніи ртутью золота, которымъ покрыты стѣнки піезометра. Поправки на кубическую сжимаемость піезометра, подвергавшагося одновременно внутреннему и внѣшнему давленіямъ, Cailletet не дѣлалъ; онъ изслѣдовалъ воду, эѳиръ, алкоголь и сѣрнистый углеродъ и нашелъ для воды, напримѣръ:

$$\chi_a=0.00000451 \text{ при } 750 \text{ атм. и } 8^\circ \text{ C.},$$

такъ что если принять

$$k=0.00000225,$$

[1]) Cailletet. Comptes rendus, t. 75, p. 77, 1872.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de physique. Tome I, fas. I, p. 129, 1882.

то

$$\chi_v=0.0000473 \text{ при } 705 \text{ атм. } 8^0 \text{ C.},$$

а по Grassi,

$$\chi_v=0.0000487 \text{ при } 10 \text{ атм. и } 8^0 \text{ C.}$$

Сравненіе этихъ чиселъ показываетъ, что вода сжимается пропорціонально давленію. Съ другими упомянутыми жидкостями получился подобный же результатъ, что приводитъ къ вѣроятному заключенію, что сжимаемость испытанныхъ жидкостей постоянна на значительномъ протяженіи скалы давленій.

17. Въ теченіи 1871—1873 гг. Dupré и Page[1]) обнародовали двѣ статьи, въ которыхъ между прочимъ они изслѣдовали сжимаемость воды, спирта и ихъ смѣсей. Ихъ метода была метода Regnault-Grassi, а къ величинѣ кажущейся сжимаемости жидкости χ_a они придавали коэффиціентъ кубической сжимаемости стекла

$$k=0.0000020.$$

Такимъ образомъ, они получили слѣдующія числа для воды

$$\chi_v=0.00004774 \text{ при } t=9^0 \text{ C.}^2),$$

$$\chi_v=0.00004741 \text{ при } t=16.8^0 \text{ C.}^3).$$

Они впервые показали на смѣсяхъ воды и метиловаго алкоголя, что сжимаемость смѣси нельзя вычислять изъ сжимаемости составныхъ частей; оказалось, что для упомянутыхъ растворовъ разность между вычисленною сжимаемостью и на-

---

[1]) Dupré und Page. Pogg. Ann., Erg. Bd. V, p. 221, 1871; Dupré. Pogg. Ann., Bd. 148, p. 236, 1873.

[2]) и [3]) Loc. cit., p. 240. Эти статьи появились въ 1869 г. въ Philos. Transactions и въ 1872 г. въ Proc. Royal Society.

блюденною возрастаетъ съ возрастаніемъ процентнаго содержанія алкоголя и достигаетъ maximum'а при 50% состава смѣси.

18. Въ 1877 году, Amagat [1]) помѣстилъ работу по вопросу объ измѣненіи сжимаемости въ зависимости отъ температуры въ предѣлахъ отъ 11° C. до 100° C. Онъ искалъ, что дѣлается съ сжимаемостью такой жидкости, какъ напримѣръ эѳиръ хлористоводородной кислоты, который искусственно удерживался значительнымъ давленіемъ при температурѣ 100° C. въ жидкомъ состояніи. Эта работа интересна не только по экспериментальному матеріалу, но главнымъ образомъ по оправданію нѣкоторыхъ формулъ механической теоріи тепла. Въ ней выясняется также зависимость сжимаемости отъ давленія, которое мѣнялось отъ 4 до 37 атмосферъ.

Онъ изучилъ эѳиры: хлористоводородной кислоты, бромистоводородной кислоты, обыкновенный, метиловый эѳиръ уксусной кислоты, этиловый эѳиръ уксусной кислоты, алкоголи: обыкновенный, метиловый и амиловый; углеродистые водороды: водородистый амиленъ, водородистый гексиленъ, водородистый гептиленъ и бензинъ; ацетонъ; хлороформъ, сѣрнистый углеродъ.

Его метода состояла въ томъ, что онъ подвергалъ піезометръ только одному внутреннему давленію, вслѣдствіе чего получалъ слишкомъ большіе коэффиціенты кажущейся сжимаемости

$$\chi = \frac{\theta}{P_0 W_0}. \tag{14}$$

Чтобы перейти къ истинной сжимаемости и найти поправку на упругое расширеніе піезометра θ_0, Amagat дѣлалъ сравнительные опыты съ водою. Получивъ свой коэффиціентъ χ и вычтя изъ него истинный χ_r, взятый изъ наблюденій Grassi, онъ находилъ поправку

---

[1]) Amagat. Annales de chim. et de phys. (5) 11, p. 520, 1877.

$$\theta_0 = \chi - \chi_0, \qquad (15)$$

которою затѣмъ и пользовался во всѣхъ опытахъ, считая ее постоянной въ предѣлахъ отъ комнатной температуры до 100° С.

Онъ погружалъ піезометръ въ ванну, температуру которой, отъ 11° С. до 100° С., регулировалъ соотвѣтственнымъ притокомъ газа къ горящему рожку, а манометръ онъ употреблялъ воздушный. Точность измѣреній удостовѣрялась по сравненію коэффиціентовъ сжимаемости воды, полученныхъ двумя піезометрами *A* и *B* въ началѣ и въ концѣ изслѣдованія.

Amagat обращаетъ вниманіе на фактъ, что нѣкоторыя жидкости приходятъ подъ вліяніемъ давленія въ стаціонарное состояніе только черезъ 15 минутъ; таковъ, напримѣръ, эѳиръ хлористоводородной кислоты. Кромѣ того, онъ замѣтилъ, что вліяніе воздуха, раствореннаго въ жидкостяхъ, не играетъ той роли, которую ему часто приписываютъ; онъ нашелъ, что алкоголь, эѳиръ и ацетонъ даютъ одни и тѣ же коэффиціенты сжимаемости — прогнать-ли изъ нихъ воздухъ кипяченіемъ или нѣтъ.

19. Въ 1883 году, Quincke [1]) искалъ соотношеніе между сжимаемостью жидкостей и измѣненіемъ показателя преломленія сжимаемыхъ жидкостей. Такъ какъ онъ оперировалъ надъ еще неизслѣдованными жидкостями и при малыхъ давленіяхъ, всего около 0.5 атмосферы, то онъ сдѣлалъ самостоятельное опредѣленіе коэффиціентовъ сжимаемости слѣдующихъ тѣлъ: глицерина, маселъ — сурѣпнаго, миндальнаго и оливковаго, воды, сѣрнистаго углерода, терпентина, бензола изъ бензойной кислоты, бензола, петролеума, алкоголя и эѳира. Его метода была общепринятая: шарообразный піезометръ помѣщался подъ колоколъ воздушнаго насоса, откуда выкачивался воздухъ до 0.5 атмосферы, вслѣдствіе чего жидкость поднималась въ

[1]) G. Quincke. Wied. Ann., Bd. 19, p. 401, 1883.

капиллярѣ; затѣмъ впускался воздухъ, піезометръ испытывалъ приращеніе давленія внутри и извнѣ, и жидкость сжималась на θ''. Quincke не опредѣлилъ коэффиціента кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра, а вычислилъ его по сравненію своихъ коэффиціентовъ кажущейся сжимаемости воды съ абсолютными числами Grassi. Благодаря этому и ничтожности давленія, его результаты не представляютъ особаго интереса. Коэффиціентъ сжимаемости k, вычисленный такимъ способомъ, достигаетъ у него значеній:

стекло
- $k=0.00000246$ піезометръ тюрингенскій,
- $k=0.00000467$ піезометръ хрустальный,
- $k=0.00000337$ піезометръ тюрингенскій.

Послѣднія два числа слишкомъ велики, согласно опредѣленіямъ Regnault, Grassi, новѣйшимъ Amagat и моимъ [1]).

Quincke констатируетъ интересный фактъ увеличенія сжимаемости глицерина съ уменьшеніемъ температуры; такимъ образомъ, не одна вода слѣдуетъ этому закону.

20. Въ 1883 году, появилась статья Drecker'a [2]) по вопросу о внутренней работѣ расширенія смѣсей сравнительно съ внутренней работой ихъ составныхъ частей, для разрѣшенія котораго ему пришлось между прочимъ изслѣдовать сжимаемость воды, алкоголя, сѣрнистаго углерода, хлороформа и ихъ смѣсей. Особенность его методы состоитъ въ томъ, что его піезометръ имѣлъ двѣ капиллярныя трубки съ одного конца для облегченія манипуляцій чистки, наполненія и т. д.; онъ подвергалъ піезометръ внутреннему и внѣшнему давленію до семи атмосферъ и, чтобы перейти отъ наблюденій кажущейся сжи-

---

[1]) См. таблицу кубической сжимаемости стекла, глава II, § 16.

[2]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 20, p. 870, 1883.

маемости къ истинной, прибавлялъ на основаніи опытовъ Regnault

$$k = 0.00000185.$$

Наполненіе піезометра жидкостью происходило при обыкновенной температурѣ, а не при кипѣніи, изъ боязни измѣнить процентное отношеніе составныхъ частей смѣси; это отступленіе Drecker считаетъ оправдываемымъ только что описанными опытами Amagat съ эѳиромъ, ацетономъ и алкоголемъ. Для воды онъ нашелъ

$$\chi_v = 0.0000478 \text{ при } 12^0.8 \text{ C.},$$

число весьма близкое къ числамъ Grassi. При этомъ онъ впервые наблюдаетъ полное измѣненіе объема сжимаемой жидкости D_t и игновенное D_m, между которыми, на основаніи формулы W. Thomson'a

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{A T v_0 \alpha_t}{c_p}, \tag{16}$$

онъ устанавливаетъ соотношеніе

$$\chi_a = D_t = D_m + \frac{\alpha\tau}{1+25\alpha}. \tag{17}$$

Въ этихъ выраженіяхъ dt есть приращеніе тепла, которое испытываетъ тѣло въ адіабатическомъ процессѣ, если его сжать на dp; $T=273+t$ есть абсолютная температура, α_0 — коэффиціентъ расширенія, v_0 — начальный объемъ, c_p удѣльная теплота при постоянномъ давленіи, $A = \frac{1}{424}$ тепловой эквивалентъ единицы работы; τ измѣненіе температуры тѣла, сжатаго на одну атмосферу; кажущаяся сжимаемость $\chi_a = D_t$. Рядъ опытовъ, произведенныхъ при $t=25^0$ C., вполнѣ оправдалъ формулу (17).

Интересно поэтому отмѣтить величину τ и связанныя съ нею измѣненія объема $\frac{\alpha\tau}{1+25\alpha}$, вычисленныя для нѣкоторыхъ жидкостей изъ этихъ опытовъ.

	τ^0 C.	$\frac{\alpha\tau}{1+25\alpha}$
Алкоголь.......	0.01620	0.0000175
Сѣрнист. углер.	0.02812	0.0000333
Хлороформъ....	0.02696	0.0000344
Вода.........	0.00185	0.0000469

Эта таблица показываетъ, что различныя жидкости нагрѣваются при сжатіи неодинаково, и что вода нагрѣвается значительно слабѣе остальныхъ приведенныхъ здѣсь жидкостей. Число Drecker'а меньше числа Regnault, равнаго $0^0.02$ C. на 10 атм., которое было получено путемъ прямыхъ измѣреній. При изслѣдованіи смѣсей Drecker подтвердилъ наблюденія Dupré и Page'а касательно разногласія между вычисленною сжимаемостью смѣси по сжимаемости составныхъ ея частей и непосредственно наблюденною; разности бываютъ то положительныя, то отрицательныя. Наконецъ, онъ помѣстилъ рядъ чиселъ, характеризующихъ отношенія $\frac{c_v}{c_p}$ удѣльной теплоты при постоянномъ объемѣ къ удѣльной теплотѣ при постоянномъ давленіи; вотъ нѣсколько чиселъ:

	$\frac{c_v}{c_p}$
Вода.........	1.010
Алкоголь.......	1.183
Хлороформъ....	1.472
Сѣрнист. углер.	1.525

21. Въ 1884 году, Pagliani e Vicentini (Il Nuovo Cimento (3) t. 16, 1884, pp. 27 и 161) прослѣдили сжимаемость воды отъ 0° до 100° С., употребивъ стеклянные піэзометры, и подобно Amagat, только внутреннее давленіе, которое мѣнялось отъ 1 атм. до 4.5 атм. Переходъ отъ наблюдаемой сжимаемости къ истинной они дѣлали на основаніи сравненія своихъ измѣреній съ истинными коэффиціентами χ_r Grassi. Называя черезъ θ_0 полное упругое расширеніе внутренняго объема W_0 піезометра, они нашли

$$\frac{\theta}{P_0 W_0} - \chi_r = \theta_0, \tag{18}$$

причемъ для піезометра A и B, при 0°, оказалось:

$$\theta_0 = 0.0000361 \ (A),$$
$$\theta_0 = 0.0000308 \ (B).$$

Чтобы при помощи этихъ значеній перевести всѣ свои наблюденія въ абсолютные коэффиціенты сжимаемости χ_r, они допустили, что коэффиціентъ θ_0 не зависитъ отъ температуры, согласно чему, выразили свои наблюденія въ слѣдующей таблицѣ (3).

Таблица I коэффиціентовъ сжимаемости воды.

1.	2.	3.	4.	5.
T	$\frac{\theta}{P_0 W_0}$	χ_r	θ_0	χ_r
0° С.	0.0_4811	0.0_4503 (C)	0.0_4308	0.0_4503
0—3.5	806	498	309	497
8—10	785	477	312	472
15.59	766	458	316	450
31.06	748	440	323	425
40.31	736	428	328	408
49.31	736	428	333	403
57.04	729	421	337	392
61.15	728	420	339	389
66.25	730	422	341	389
77.36	745	437	347	398
99.20	767	459	358	409

Этими наблюденіями они констатировали minimum сжимаемости воды около 63° С. и, вопреки Grassi, отсутствіе maximum'а около 4° С.; такъ что сжимаемость воды правильно убываетъ отъ 0° до 63°С., начиная откуда возрастаетъ и при 100°С. достигаетъ той величины, которую она имѣетъ приблизительно при 15.5° С. Результаты своихъ наблюденій они изобразили графически, причемъ ходъ ихъ кривыхъ очень правиленъ для каждаго піезометра въ отдѣльности, но кривыя расположены далеко другъ отъ друга, что и доказываетъ мысль о невозможности сравнивать даже коэффиціенты χ_a, не зная коэффиціента k, отъ котораго, какъ видно изъ уравненій Lamé, зависитъ коэффиціентъ θ_0.

Желая поэтому придать прочность своимъ измѣреніямъ, они нашли по методѣ Jamin'a, помощью поправочной трубки, измѣненія γ внѣшняго объема піезометра W_1 при 0° С. и при 100°С. и опредѣлили коэффиціенты

$$\theta_1 = \frac{\gamma}{W_1}\,\frac{760}{P_0} \tag{19}$$

для обоихъ піезометровъ, которые оказались:

$$\theta_1 = 289\times10^{-7} \text{ при } 0^\circ \text{ С.},$$
$$\theta_1 = 336\times10^{-7} \text{ при } 99^\circ.4 \text{ С.}$$

Замѣнивъ найденное отношеніе коэффиціентовъ

$$\frac{\theta_{1(0)}}{\theta_{1(100)}}$$

отношеніемъ

$$\frac{\theta_{0(0)}}{\theta_{0(100)}},$$

въ которомъ $\theta_{0(0)}$ вычислено, какъ уже указано въ ур. (18),

они получили для піезометра B

$$\theta_{0(0)} = 0.0000308 \text{ при } 0^\circ C.$$

$$\theta_{0(100)} = 0.0000358 \text{ при } 100^\circ C.$$

Изъ этихъ чиселъ они составили 4-ю и 5-ю колонны предъидущей таблицы и числа послѣдней колонны перевели въ кривую C.

Какъ легко усмотрѣть, колонна 3-а значительно разнится отъ колонны 5-й, и хотя характеръ соотвѣтственныхъ кривыхъ почти тотъ же самый, тѣмъ не менѣе однако—абсолютный ихъ ходъ различенъ, а это обстоятельство и указываетъ на необходимость точнаго знанія коэффиціентовъ θ_0.

22. Pagliani e Palazzo[1]) пробовали изслѣдовать ту зависимость сжимаемости отъ температуры на смѣси воды и алкоголя и нашли: что съ примѣсью спирта къ водѣ до 19% коэффиціентъ сжимаемости смѣси убываетъ съ возрастаніемъ температуры; что при высшихъ концентраціяхъ сжимаемость смѣси возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры; что каждой смѣси соотвѣтствуетъ температура, при которой коэффиціентъ сжимаемости достигаетъ своего minimum'а, послѣ котораго онъ вновь растетъ. Температура наименьшей сжимаемости смѣси всегда ниже, чѣмъ чистой воды, и притомъ настолько ниже, насколько выше процентное содержаніе алкоголя.

23. Съ 1886 года появился рядъ работъ, предметъ изученія которыхъ составляетъ сжимаемость не простыхъ жидкостей, но растворовъ солей. Въ числѣ первыхъ работъ по времени находится изслѣдованіе Röntgen'a и Schneider'a[2]), которые задались широкою цѣлью изучить одновременно различныя

[1]) Pagliani e Palazzo. Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Bd. 8, 1884, p. 795; также Pagliani. Beiblätter. Bd. 14, 1890. p. 94.

[2]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann. Bd. 29, 1886, p. 165.

свойства растворовъ, причемъ они пользовались въ своихъ изслѣдованiяхъ по различнымъ вопросамъ растворами, приготовленными разъ навсегда и послѣ того тщательно сохраненными. Они желали изучить: поверхностное натяженiе, сжимаемость, внутреннее тренiе, упругость паровъ и т. д., и остановили свое вниманiе на водныхъ растворахъ: iодистыхъ, бромистыхъ, хлористыхъ, азотнокислыхъ, сѣрнокислыхъ и углекислыхъ соединенiяхъ водорода, аммонiя, литiя, калiя и натрiя, а также ихъ гидратовъ. Изъ этого ряда были исключены iодистоводородная кислота и углекислый аммонiй вслѣдствiе ихъ непрочности, а углекислый литiй вслѣдствiе его слабой растворимости; всѣхъ такихъ растворовъ было приготовлено около 80. Концентрацiю растворовъ они опредѣляли не процентнымъ содержанiемъ соли, а нѣсколько иначе; они сравнивали между собою такiе растворы, которые содержали въ опредѣленномъ числѣ молекулъ воды постоянное число молекулъ растворенной соли.

Ихъ метода была общепринятая Canton-Oerstedt'а, слѣдовательно, они опредѣляли не истинную, а кажущуюся сжимаемость. При этомъ они поступали слѣдующимъ образомъ: назвавъ черезъ χ_a'' и χ_a''' кажущуюся сжимаемость воды и раствора, они опредѣляли коэффицiентъ относительной кажущейся сжимаемости

$$\chi_{r,a}=\frac{\chi_a'''}{\chi_a''}, \tag{20}$$

отнеся всѣ свои измѣренiя къ водѣ при 18° C. Они пользовались двумя стеклянными пiезометрами № I и № II, къ которымъ капилляры были пришлифованы; самые капилляры были весьма тщательно прокамбрированы по методѣ Thiessen-Neumann'а. Оба пiезометра одновременно находились въ приборѣ Oerstedt'а, причемъ пiезометръ № I служилъ въ качествѣ манометра; кромѣ него, они имѣли ртутный манометръ до 8 атмосферъ. Наблюденiя производились черезъ 15 минутъ, чтобы температура была строго стацiонарна; термоэлектрическое измѣренiе

тепла, развиваемаго сжатіемъ, не привело къ точному заключенію о величинѣ нагрѣванія.

Они также задались цѣлью выяснить, каково вліяніе смачиванія стѣнокъ капилляра изслѣдуемою жидкостью. Оказалось, что колонна различныхъ растворовъ въ 1 cm. длины укорачивалась при перемѣщеніи на 1 cm. на 0.012 cm.

Вообще Röntgen'у и Schneider'у слѣдуетъ отдать справедливость и признать ихъ изслѣдованіе тщательно выполненнымъ; они старались выяснить роль каждой ошибки въ отдѣльности, всѣдствіе чего и считаютъ свои результаты точными до единицы третьей значущей десятичной цыфры.

Не ограничившись опредѣленіемъ относительной сжимаемости, Röntgen und Schneider занялись также и абсолютной. Въ виду этого, они сначала нашли коэффиціентъ кажущейся сжимаемости воды

$$\chi_a = 0.0000438 \text{ при } 17^0.84 \text{ C.},$$

а чтобы перейти отсюда къ истинной сжимаемости χ_r, они придали поправку на кубическую сжимаемость стекла, взявъ по Buchanan'у[1])

$$k = 0.00000292 \text{ при } 13^0 \text{ C.},$$

такъ что

$$\chi_r = 0.0000467 \text{ при } 18^0 \text{ C.}^2),$$

по Grassi

$$\chi_v = 0.0000460 \text{ при } 18^0 \text{ C.}$$

Послѣ этого относительную кажущуюся сжимаемость $\chi_{r,a}$ изученныхъ ими растворовъ, легко было выразить въ абсолютныхъ числахъ при помощи соотношенія

$$\chi_v''' = \chi_a''' + k = \chi_a'' \, \chi_{r,a} + k = 0.0000438 \, \chi_{r,a} + 0.00000292. \quad (21)$$

[1]) Buchanan. Proc. Roy. Soc. Edinb., Vol. 10, 1878, p. 697—698.

[2]) Они достигли бы большаго согласія, если-бы положили для простаго стекла k=0.0000022; коэффиціентъ Buchanan'а, очевидно, принадлежитъ хрусталю.

24. Однако, Röntgen и Schneider[1]) не удовлетворились этимъ результатомъ и занялись спеціальнымъ изученіемъ сжимаемости воды. Приборы остались прежніе, только теперь былъ введенъ въ употребленіе ртутный манометръ въ 610 cm. длины, показанія котораго приводились къ 0° и къ 45° широты. Вода была изслѣдована при 0°, 9° и 17°.95 C., причемъ всѣ термометры, разновѣски и мѣры длины были сравнены съ эталонами Normalaichungscommission въ Берлинѣ.

Результаты ихъ измѣреній можно выразить въ слѣдующей таблицѣ:

χ_a	t
0.00004910	0° C.
0.00004602	9
0.00004413	17.95

Сравнивая эти числа съ числами Grassi и Pagliani e Vicentini, они приходятъ къ заключенію:

1) Никакого maximum'а сжимаемости около 4° C. нѣтъ, вопреки утвержденію Grassi.

2) Нанесши наблюденія Grassi на координатную сѣть, видно, что его наблюденія заключали случайныя ошибки, такъ какъ полученная кривая не имѣетъ правильнаго хода.

3) Ихъ кривая идетъ правильно, и ходъ ея согласенъ съ ходомъ кривой Pagliani e Vicentini, хотя убываніе коэффиціента χ_r съ возрастаніемъ температуръ у нихъ медленнѣе, чѣмъ у Pagliani-Vicentini[2]). Кромѣ этихъ трехъ кривыхъ, они

[1]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann., Bd. 33, 1888, p. 644.

[2]) Такъ какъ $\chi_a = \chi_r - k$, а коэффиціентъ k различныхъ стеколъ различенъ, то ходъ кривыхъ при различныхъ сортахъ стекла піезометровъ и не можетъ быть одинаковъ.

вычертили еще одну по наблюденіямъ Dr Zehnder'a[1]), основаннымъ на уравненіи Gladstone-Landolt'a

$$\frac{n-1}{d} = const.,$$

въ которомъ n есть показатель преломленія среды, а d—ея плотность; ходъ этой послѣдней совершенно тождественъ съ ходомъ ихъ кривой.

Переходъ отъ коэффиціентовъ χ_a къ коэффиціентамъ χ_r они сдѣлали въ этотъ разъ на основаніи своихъ измѣреній кубической сжимаемости каменной соли; путемъ вычисленій они опредѣлили, что сжимаемость стѣнокъ ихъ піезометра

$$k = 0.0000021.$$

Такимъ образомъ ихъ наблюденія резюмируются слѣдующей таблицею:

χ_v	t
0.0000512	0° C.
0.0000481	9
0.0000462	17.95

Эти числа вполнѣ согласуются съ числами Grassi.

Они, между прочимъ, еще изслѣдовали сжимаемость воды, прокипяченной и содержащей воздухъ, и нашли, что въ сжимаемости такихъ образцовъ нѣтъ той значительной разницы, о которой упоминаютъ Colladon et Sturm[2]).

25. Въ непосредственной связи съ работами Röntgen'a и Schneider'a по идеѣ и по времени находятся изслѣдованія Braun'a, Max Schumann'a и Drecker'a, къ изложенію которыхъ мы теперь и перейдемъ.

---

[1]) Zehnder. Wied. Ann., Bd. 34, 1888, p. 115 etc.

[2]) По вопросу о сжимаемости жидкостей, содержащихъ газы, см. Isambert. Comptes rendus. T. 105, 1887, p. 375 и p. 1173.

Braun [1]) изслѣдовалъ вопросъ о растворимости твердыхъ тѣлъ и о сопровождающихъ ее измѣненіяхъ объема и энергіи, для рѣшенія котораго ему необходимо было произвести спеціальное изслѣдованіе сжимаемости нѣкоторыхъ солей и ихъ растворовъ [2]).

Заключивъ растворъ въ дилатометръ съ пришлифованнымъ капилляромъ, онъ кипятилъ его для освобожденія отъ воздуха, а затѣмъ помѣщалъ въ приборъ Oerstedt'a. Коэффиціентъ k Braun опредѣлилъ, какъ разность между коэффиціентами сжимаемости воды $\chi_v - \chi_a$, причемъ принималъ $\chi_v = 0.000051$ при 1^0 C., а χ_a наблюдалъ непосредственно. Опредѣленіе сжимаемости твердыхъ солей было произведено слѣдующимъ образомъ: онъ наполнялъ дилатометръ концентрированнымъ растворомъ данной соли при высокой температурѣ, около 33^0 C., вслѣдствіе чего при охлажденіи его до 0^0 на дно сосуда осаждалась кристаллическая соль; такимъ пріемомъ ему удавалось довести наполненіе твердою солью до половины дилатометра. Сжимаемость соли ему приходилось вычислять: по сжимаемости раствора, по удѣльнымъ вѣсамъ раствора и твердой соли, по вѣсамъ раствора и соли, и онъ получилъ слѣдующіе результаты при $t = 1^0$ C.

Названіе соли	Сжимаемость соли	Сжимаемость нас. раствора
Хлористый аммоній	0.0000049	0.000038
Квасцы..........	0.0000019	0.000046
Хлористый натрій..	0.0000014	0.000027
Глауберова соль ..	0.0000071	0.000042

[1]) Braun. Wied. Ann., Bd. 30, 1887, p. 250.
[2]) Braun. Loc. cit., p. 264.

Röntgen и Schneider[1]) подобнымъ-же пріемомъ опредѣляли кубическую сжимаемость твердой соли хлористаго натрія и нашли

$$\chi_v = 5.2 \times 10.^{-6}$$

Такъ какъ это число значительно разнится отъ числа 1.4×10^{-6} Braun'а, то для контроля они вычислили кубическую сжимаемость этой соли изъ наблюденныхъ Voigt'омъ модулей гнутія и крученія и нашли

$$k = 4.2 \times 10.^{-6}$$

Эти два числа говорятъ противъ измѣреній Braun'а, въ чемъ онъ и самъ соглашается[2]).

26. По способу Quincke и въ его лабораторіи Max Schumann[3]) продолжалъ изслѣдованіе сжимаемости жидкостей, остановивъ свое вниманіе на водныхъ растворахъ хлоридовъ натрія, калія, кальція, аммонія, барія и стронція. Метода, средства и даже часть піезометровъ были взяты изъ предъидущихъ изслѣдованій Quincke (см. § 19), вотъ почему въ этой работѣ мы не встрѣчаемъ ничего новаго въ смыслѣ методы. Піезометры были изготовлены Geissler'омъ изъ тюрингенскаго стекла, а коэффиціенты кубической сжимаемости найдены по разности

$$\chi_v - \chi_a = k; \qquad (22)$$

въ которой χ_v взято изъ опытовъ Grassi по сжимаемости воды, а χ_a найдено авторомъ для всѣхъ піезометровъ при 0°; такимъ образомъ, оказалось для піезометра

---

[1]) Röntgen & Schneider. Wied. Ann., Bd. 31, 1887, p. 1003 и Bd. 34 1888, p. 551.

[2]) Braun. Wied. Ann., Bd. 33, 1888, 239.

[3]) Max Schumann. Wied. Ann., Bd. 31, 1887, p. 14.

№ I $k = 0.00000135$,

№ II $k = 0.00000090$,

№ III $k = 0.00000342$,

№ IV $k = -0.00000084$.

Сжимаемость стекла, однако, въ такихъ предѣлахъ на самомъ дѣлѣ не колеблется; новѣйшія изслѣдованія[1]) показали, что для французскаго обыкновеннаго стекла

$$k = 0.00000221,$$

для хрусталя

$$k = 0.00000274,$$

для нѣмецкаго стекла

$$k = 0.00000244.$$

Вслѣдствіе этого, я не считаю возможнымъ допускать такія значенія, какъ $k = 0.90 \times 10^{-6}$ и тѣмъ менѣе $k = -0.84 \times 10^{-6}$. Эти числа показываютъ, что коэффиціентъ χ_a Schumann'а слишкомъ великъ сравнительно съ коэффиціентами Grassi; въ этомъ отношеніи наблюденія Quincke безупречнѣе, и въ нихъ видна обратная разница, т. е. коэффиціентъ χ_a маловатъ. Нужно полагать, что въ этой неточности и лежитъ причина разногласія между нѣкоторыми выводами Schumann'а и выводами Röntgen & Schneider'а и Drecker'а. Наблюденія были произведены при 0° и комнатной температурѣ, а давленія были очень малыя, всего въ 100—500 m.m. ртутнаго столба.

Вотъ заключенія, къ которымъ приходитъ Schumann.

1) Сжимаемость воднаго раствора одного и того же хлорида и при одной и той же температурѣ тѣмъ меньше, чѣмъ больше концентрація раствора.

---

[1]) См. таблицу V кубической сжимаемости стекла, гл. II, § 16.

2) Малыя количества примѣшиваемыхъ къ водѣ солей измѣняютъ ея сжимаемость весьма различно; измѣненіе зависитъ не только отъ количества и рода соли, но и отъ температуры.

3) Слабые растворы хлористаго калія и хлористаго кальція при 15° С., хлористаго аммонія и хлористаго стронція при 0°—обладаютъ большею сжимаемостью нежели вода при тѣхъ же температурахъ. Поэтому всегда возможно найти растворъ этихъ солей, который обладаетъ такою же сжимаемостью, какою обладаетъ вода при той же температурѣ.

4) Всѣ разжиженные растворы солей повторяютъ аномалію воды; при 0° они сжимаются сильнѣе, чѣмъ при болѣе высокихъ температурахъ.

5) Растворы хлористаго аммонія, хлористаго калія и, вѣроятно, хлористаго барія при всякой концентрація обладаютъ свойствомъ — уменьшать свою сжимаемость съ возрастаніемъ температуры.

6) Растворы хлористаго натрія, хлористаго кальція и хлористаго стронція, начиная съ нѣкоторой концентраціи для различныхъ солей весьма различной, напоминаютъ большинство жидкостей, т. е. ихъ сжимаемость возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры; при этомъ въ болѣе концентрированныхъ растворахъ хлористаго натрія и хлористаго стронція вліяніе температуры не зависитъ отъ концентраціи.

7) Та степень концентраціи, начиная съ которой растворы трехъ упомянутыхъ солей обладаютъ нормальнымъ свойствомъ сжимаемости (возрастаніе ея съ возрастаніемъ температуры), даетъ для каждой изъ нихъ такой растворъ, сжимаемость котораго не зависитъ отъ температуры. Это свойство жидкостей устанавливается впервые.

8) Между сжимаемостью и плотностью изученныхъ тѣлъ нельзя установить какой-либо простой зависимости.

27. Въ 1888 году, Drecker [1]) опубликовалъ дальнѣйшія

[1]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 34, 1888, p. 952.

свои изслѣдованія по сжимаемости жидкостей (см. § 20), остановивъ на этотъ разъ свое вниманіе также на растворахъ хлористаго калія и хлористаго кальція. Онъ приготовилъ по семи растворовъ каждой соли различнаго процентнаго содержанія, причемъ наполнялъ теперь піезометръ при кипѣніи, такъ какъ при холодномъ способѣ наполненія всегда обнаруживалось присутствіе воздуха; вопреки ожиданію, кипѣніе весьма ничтожно измѣняло концентрацію раствора, приблизительно 0.1 gr. на 250 gr.; кромѣ того, для контроля процентное содержаніе опредѣлялось титрованіемъ. Давленіе до 5 атмосферъ измѣрялось болѣе чувствительнымъ воздушнымъ манометромъ; предѣлы отклоненій его измѣреній не превышали 0.4%; вычисленіе коэффиціента сжимаемости χ_a было всецѣло основано на формулѣ (17), согласно которой онъ наблюдалъ лишь мгновенныя измѣненія объема D_m. Изъ этихъ опытовъ онъ нашелъ для воды

$$\chi_a = 0.0000443 \text{ при } 17{,}84^\circ \text{ C.},$$

а по Röntgen'у и Schneider'у

$$\chi_a = 0.0000438 \text{ при } 17{,}84^\circ \text{ C.}$$

Переходъ отъ коэффиціента χ_a къ коэффиціенту χ_c сдѣланъ при помощи взятаго у Regnault числа

$$k = 0.0000018.$$

Подобная же разница въ 1.5% обнаружилась при сравненія коэффиціентовъ сжимаемости растворовъ, которую Drecker справедливо приписываетъ различной сжимаемости піезометровъ. Съ наблюденіями Schumann'а такого согласія нѣтъ, и разности—то положительныя, то отрицательныя,—иногда достигаютъ 10%. Результаты этого изслѣдованія стоятъ въ противорѣчіи съ нѣкоторыми выводами Schumann'а: во-первыхъ, Drecker отрицаетъ открытую Schumann'омъ аномалію разжи-

женныхъ растворовъ хлористаго калія и хлористаго кальція, состоящую въ томъ, что при 15° С. они обладаютъ большею сжимаемостью, чѣмъ чистая вода. Эта аномалія отрицается также Röntgen & Schneider'омъ [1]); а во-вторыхъ, онъ не признаетъ того, чтобы сжимаемость растворовъ хлористаго аммонія, хлористаго кальція и, вѣроятно, хлористаго барія, уменьшалась съ возрастаніемъ температуры.

Зато онъ вполнѣ подтверждаетъ выводы Röntgen'а и Schneider'а.

На основаніи своихъ измѣреній Drecker высказываетъ слѣдующія положенія:

1) Сжимаемость растворовъ хлористаго калія и хлористаго кальція всегда меньше сжимаемости воды.

2) Уменьшеніе сжимаемости, однако, не пропорціонально содержанію соли.

3) Сжимаемость этихъ растворовъ до опредѣленной концентраціи убываетъ съ возрастающей температурой аналогично водѣ, а послѣ нея возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры, подобно спирту, эѳиру и т. д. Такая степень концентраціи для растворовъ хлористаго калія равна 16%, а для хлористаго кальція — 20%, и сжимаемость этихъ растворовъ не зависитъ отъ температуры.

28. Въ этотъ періодъ времени Röntgen и Schneider [2]) опубликовали еще одинъ мемуаръ, въ которомъ сдѣлали возраженія Schumann'у:

1) Слабые растворы (2.52% и 3.86%) хлористаго калія и хлористаго кальція имѣютъ, согласно Schumann'у, при 15° С. большую сжимаемость, чѣмъ вода при той же температурѣ; послѣ провѣрки этотъ выводъ оказался ошибочнымъ.

2) Они не признали также того согласія, которое усматривалъ Schumann между своими измѣреніями и ихъ, такъ какъ

[1]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann., Bd. 31, p. 1000, 1887.

[2]) Ibidem.

уклоненія иногда достигаютъ 10%; о столь значительныхъ уклоненіяхъ упоминаетъ и Drecker.

29. Начиная съ 1883 и до 1888, профессоръ Tait опубликовалъ рядъ мелкихъ замѣтокъ по сжимаемости нѣкоторыхъ жидкостей и въ частности воды и ртути [1]). Общій результатъ этихъ изслѣдованій данъ въ Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, Bd. XIII, p. 442, за 1889 годъ. Подобно Aimé, Tait погружалъ свой піезометръ въ море на значительную глубину, такъ что давленія достигали 150—450 атм; онъ измѣрялъ ихъ помощью поршневыхъ манометровъ Amagat (manomètre à piston libre). Регистрированіе уровня жидкости въ піезометрѣ совершалось различными способами: разложеніемъ серебра на стѣнкахъ капилляра, помощью электрическаго тока и подвижныхъ указателей, какъ въ термометрахъ Sixt-Casella à maximum и minimum. Для перехода отъ кажущейся сжимаемости χ_a къ истинной χ_r, онъ измѣрилъ кубическую сжимаемость стѣнокъ піезометра помощью опыта, въ которомъ стеклянный стержень укорачивался подъ дѣйствіемъ всесторонняго гидростатическаго давленія, и нашелъ для хрусталя

$$k=0.0000026,$$

а коэффиціентъ сжимаемости ртути

$$\chi_r=0.0000036.$$

Tait подробно изслѣдовалъ сжимаемость воды, взятой изъ источника, при разныхъ давленіяхъ p (выраженныхъ въ тоннахъ; тонна = 150 атм.) и при разныхъ температурахъ t и установилъ связь между ними въ формѣ слѣдующаго уравненія:

$$\chi_r=10^{-7}(520-17p+p^2)-10^{-9}(355+5p)t+10^{-9}(3+p)t^2 \quad (23)$$

---

[1]) Краткіе разборы его работъ помѣщены въ Beiblätter, Bd. 8, p. 12, p. 439; Bd. 9, p. 374; Bd. 10, p. 149.

Это уравненіе показываетъ, что сжимаемость падаетъ съ возрастаніемъ температуры и давленія; minimum сжимаемости воды лежитъ около 60° С. при малыхъ давленіяхъ, а при большихъ давленіяхъ онъ перемѣщается ниже.

Pagliani [1]) провѣрилъ эту формулу въ зависимости отъ температуры, т. е.

$$\chi_v = 10^{-7}(520 - 3.55t + 0.03t^2) \tag{24}$$

и вполнѣ оправдалъ ее; онъ нашелъ [2]):

Таблица II сжимаемости воды.

t	$\chi_v \times 10^{7}$ наб.	$\chi_v \times 10^{7}$ выч.
0	521	520
10	489	487.5
20	463	461
30	442	440.5
40	427	426
50	416	417.5
60	408	415
70	409	418.5
80	415	—
90	421	—
100	430	—

[1]) Числа второй колонны исправлены на основаніи опытовъ Amagat (C. R. 104, 1887).

[2]) Pagliani. Beiblätter. Bd. 14, 1890, p. 93.

Для морской воды Tait далъ уравненіе

$$\chi_r=10^{-7}(481-21.25p+2.25p^2)-10^{-9}(355+5p)t+10^{-9}(3+p)t^2, \quad (25)$$

согласно которому minimum χ_v при атмосферномъ давленіи лежитъ около 56° C.

Кромѣ того, онъ изслѣдовалъ еще четыре раствора хлористаго натрія.

Изъ своихъ опытовъ надъ сжимаемостью воды и опытовъ Despretz надъ отношеніемъ плотности воды при 0° и 4° C. Tait вычислилъ пониженіе точки maximum'а плотности въ зависимости отъ давленія и нашелъ, что при давленіи въ 150 атмосферъ она должна понижаться на 3°.17 C., изъ опыта-же оказалось всего 3° C.; при давленіи въ 327 атмос. точки maximum плотности и замерзанія совпадаютъ на дѣленіи—2.4° C.[1]).

30. Въ 1887 году, Amagat[2]) независимо отъ Tait'а опубликовалъ изслѣдованіе о сжимаемости воды, но предѣлы его давленій были значительно больше, около 3200 атм.[3]), и температура мѣнялась также въ большихъ предѣлахъ отъ 0° до 50° C. Онъ нашелъ, что maximum плотности при давленіи въ 200 атмос. перемѣстился до дѣленія 0°.5 C., т. е. на 3.5° C. ниже, что согласуется съ вычисленіемъ и наблюденіями Tait'а.

При 700 атмосферахъ давленія maximum опустился ниже нуля—результатъ, также указанный Tait'омъ.

Amagat показалъ далѣе, что при значительныхъ давленіяхъ уменьшеніе коэффиціента сжимаемости воды съ возраста-

---

[1]) Къ сожалѣнію, я не знаю оригинальныхъ статей Tait'а, напечатанныхъ въ Repport of the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger. Phys. and Chemistry 2, part IV, p. 76. London-Edinburgh and Dublin, 1888, котораго нѣтъ въ библіотекѣ Императорскаго Новороссійскаго Университета.

[2]) Comptes Rendus. T. 104, 1887, p. 1159.

[3]) Давленія измѣрялись манометромъ à piston libre Amagat

ніемъ температуры сглаживается, и при давленіи въ 3000 атм. вода уже входитъ въ нормальный рядъ остальныхъ жидкостей; всѣ пертурбаціи онъ приписываетъ существованію maximum'a плотности. Уменьшеніе коэффиціента сжимаемости постепенно замедляется также съ повышеніемъ температуры, и какъ показали опыты Pagliani e Vicentini, окончательно останавливается за 60° C.

Кромѣ воды, Amagat[1]) еще изслѣдовалъ въ тѣхъ же предѣлахъ давленій и температуръ обыкновенный эѳиръ, алкоголи: этиловый, метиловый, пропиловый, аллиловый; ацетонъ; хлористый, бромистый, іодистый этилы; сѣрнистый углеродъ, хлористый фосфоръ. Коэффиціентовъ сжимаемости онъ не даетъ, такъ какъ пока ему неизвѣстны коэффиціенты упругости піезометровъ.

31. Въ 1888 году, De-Heen[2]) въ своемъ сочиненіи по сравнительной физикѣ и теоріи жидкостей отводитъ мѣсто сжимаемости жидкостей, причемъ интересуется, главнымъ образомъ, измѣненіемъ сжимаемости съ измѣненіемъ температуры. Онъ изучилъ слѣдующія жидкости: ксиленъ, толуенъ, бензойнокислый бутилъ, бензойнокислый амилъ, валеріяновокислый метилъ,— этилъ,—бутилъ и—амилъ, бромистый этиленъ, хлористый этиленъ, хлористый углеродъ (C_2Cl_4), маслянокислый метилъ,—этилъ,— бутилъ и—алилъ, въ предѣлахъ температуръ 10° C.—100° C. и давленія 5.25 атм. Піезометръ наполнялся всегда при кипѣніи жидкости въ пустотѣ и подвергался только одному внутреннему давленію; чтобы опредѣлить величину поправки $\theta_{0(10)}$ и $\theta_{0(100)}$, онъ воспользовался коэффиціентами сжимаемости воды χ_v при 10° C. и при 100° C. Pagliani e Vicentini (§ 21, колонна 5-я таблицы I).

32. Въ 1889 году, Amagat[3]) опубликовалъ весьма ин-

---

[1]) Amagat. Comptes rendus. T. 105, 1887, p 1120.

[2]) De-Heen. Recherches touchant la physique comparée et la théorie des liquides. Paris—Louvain, 1888, chap. III, p. 49.

[3]) Amagat. Journal de Physique, (2) t. 8, 1889, p. 197; также Annales de chim. et de phys., (6) t. 22, 1891, p. 137.

тересный мемуаръ по сжимаемости ртути. Онъ изслѣдовалъ ея сжимаемость въ 7-ми цилиндрическихъ піезометрахъ съ плоскими донышками, каждый длиною въ 1 m., съ цѣлью найти упругія ихъ свойства, такъ какъ ему необходимо было исправить свои опыты по сжимаемости газовъ и жидкостей. Метода его была по существу — методой Regnault, но онъ расположилъ свои опыты такимъ образомъ, что могъ оперировать также и по методѣ Jamin'a. Давленіе было доведено всего до 7-ми атмосферъ, а температура поддерживалась постоянно при 4° C., такъ какъ во внѣшнемъ резервуарѣ у него была налита вода, а расширеніе воды при maximum'ѣ ея плотности почти равно нулю.

Опыты Amagat замѣчательны по той тщательности, съ которою онъ изслѣдовалъ упругія свойства своихъ піезометровъ, чего нельзя сказать о цѣломъ рядѣ предъидущихъ работъ.

Онъ остановился на опредѣленіи кубической сжимаемости

$$k = 3\alpha(1-2\sigma) = \frac{3dU_0}{U_0 P} \qquad (26)$$

по способу, указанному Regnault и осуществленному когда-то Wertheim'омъ [1]). Способъ этотъ состоитъ въ вытяженіи піезометра, наполненнаго жидкостью, dU_0 есть кажущееся увеличеніе объема жидкости U_0 при растяженіи грузомъ P. Такъ какъ въ это уравненіе входятъ двѣ неизвѣстныя: коэффиціентъ вытяженія α и постоянная Poisson'a σ, то для полученія втораго соотношенія между α и σ онъ производилъ еще одинъ опытъ, въ которомъ онъ нажималъ піезометръ съ силою P_1 съ одной внѣшней стороны, какъ это дѣлалъ Regnault, тогда

$$dU_0' = \alpha \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} (5-4\sigma) P_1 U_0. \qquad (27)$$

¹) Wertheim. Annales de chim. et de phys., (3) t. 23, 1848, p. 52.

Въ послѣднемъ уравненіи dU'_0 есть кажущееся увеличеніе объема жидкости, заключенной въ томъ-же піезометрѣ; R_1 и R_0 суть его внутренній и внѣшній радіусы, а остальныя величины уже извѣстны. На основаніи послѣднихъ двухъ уравненій онъ опредѣлялъ коэффиціентъ k. Трубы для его піезометровъ были заказаны на хрустальномъ заводѣ Guilbert-Martin, въ Saint-Denis, а самые піезометры приготовлены изъ нихъ у Alvergniat à Paris.

Вотъ результаты его измѣреній:

Таблица III коэффиціентовъ сжимаемости стекла и ртути.

		σ	α	k	χ_a	χ_v
стекло	1	0.2476	$0.0_5 1434$	$0.0_5 2202$	$0.0_5 1696$	$0.0_5 3898$
	2	0.2450	1437	2200	1680	3880
	3	0.2428	1419	2190	1744	3934
среднее		0.2451	$0.0_5 1430$	$0.0_5 2197$	$0.0_5 1707$	$0.0_5 3904$
хрусталь	1	0.2538	$0.0_5 1604$	$0.0_5 2369$	$0.0_5 1547$	$0.0_5 3916$
	2	0.2481	1603	2423	1502	3925
	3	0.2534	1624	2403	1470	3937
	4	0.2443	1580	2424	1530	3954
среднее		0.2499	$0.0_5 1602$	$0.0_5 2405$	$0.0_5 1512$	3933

Отсюда окончательное значеніе истиннаго коэффиціента сжимаемости ртути есть

$$\chi_r = 0.000003918 \text{ при } 4^\circ \text{ C.}$$

33. Наконецъ, мнѣ остается указать на связь между работою Amagat и моею, изложенію которой я посвящаю третью главу этого труда.

Я занимался вопросомъ о сжимаемости маселъ и коллоидовъ зимою, въ 1888—1889 годахъ, и когда не только вся работа по сжимаемости ртути была мною обдумана, но отчасти уже и выполнена, я узналъ о прекрасной работѣ Amagat. Не считавъ для себя возможнымъ бросить начатую работу, предварительные результаты которой хорошо сходились съ числами Amagat, я рѣшилъ продолжать ее. При этомъ —

во-первыхъ, я оперировалъ одновременно по тремъ методамъ: Regnault, Jamin'а и собственной;

во-вторыхъ, поставилъ себѣ цѣлью связать методу Jamin'а съ теоріей упругости и привести числю Jamin'а (§ 13) къ числамъ Regnault, Tait'а и Amagat;

въ третьихъ, опредѣлилъ кубическую сжимаемость непосредственно по Regnault, считая $\sigma = 0.25$, и, кромѣ того, по формулѣ $k = 3(1-2\sigma)/E$, сдѣлавъ рядъ опытовъ гнутія и крученія піезометрическихъ трубъ.

Получивъ результаты согласные съ теоріей упругости и съ числами Amagat, я рѣшился обнародовать это изслѣдованіе, которое, насколько мнѣ кажется, уясняетъ, какъ связь между отдѣльными экспериментальными методами, такъ и ихъ отношеніе къ теоріи упругости.

ГЛАВА II.

Опредѣленіе кубической сжимаемости стекляныхъ стѣнокъ піезометра.

1. Обзоръ работъ, изложенныхъ въ предъидущей главѣ, привелъ насъ къ убѣжденію, что невозможно получить коэффиціента абсолютной сжимаемости жидкости χ_v, если тѣмъ или инымъ путемъ не опредѣлить коэффиціента кубической сжимаемости *k* стѣнокъ піезометра; поэтому теперь мы займемся разборомъ тѣхъ методъ, помощью которыхъ этотъ коэффиціентъ можетъ быть опредѣленъ.

2. Мы видѣли сверхъ того, что до Regnault не было строгой методы опредѣленія коэффиціента кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра, а потому мы прямо начнемъ съ его методы, которая важна по своей непосредственности, такъ какъ она позволяетъ опредѣлить коэффиціентъ *k* того именно піезометра, въ которомъ сжимается изучаемая жидкость, и такъ какъ Lamé точно основалъ ее на уравненіяхъ теоріи упругости. Lamé далъ уравненіе, носящее названіе полнаго упругаго расширенія, по которому легко опредѣлить измѣненія, испытываемыя піезометромъ, когда его подвергаютъ дѣйствію внутренняго или внѣшняго давленія, или же одновременному дѣйствію того и другаго. Предположимъ, что нашъ піезометръ построенъ изъ изотропнаго вещества и представляетъ собою полый цилиндръ, оканчивающійся полусферическими донышками, и пусть будутъ:

k — кубическая сжимаемость его стѣнокъ;

R_1— радіусъ внѣшней его стѣнки;

R_0— радіусъ внутренней его стѣнки;

$U_0=\pi R_0^2 H$—объемъ его внутренней цилиндрической части;

$V_0=\frac{4}{3}\pi R_0^3$—объемъ его внутренней сферической части;

$W_0=U_0+V_0$—его полный внутренній объемъ;

$M=\frac{R_0^2}{R_1^2-R_0^2}$ и $N=\frac{R_0^3}{R_1^3-R_0^3}$;

P_1—внѣшнее давленіе, выраженное въ атмосферахъ;

P_0—внутреннее давленіе, выраженное также въ атмосферахъ;

λ и μ—двѣ постоянныя строенія тѣла (constantes de constitution), въ функціи которыхъ Lamé выражаетъ коэффиціенты упругости, такъ что модуль Юнга

$$E=\mu\frac{(3\lambda+2\mu)}{\mu+\lambda}, \tag{1}$$

постоянная Poisson'a

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}, \tag{2}$$

а кубическая сжимаемость

$$k=\frac{3}{3\lambda+2\mu}; \tag{3}$$

θ—полное упругое расширеніе объема W_0, когда оболочка піезометра испытываетъ дѣйствительныя давленія P_1 и P_0.

Lamé доказалъ, что

$$\begin{aligned}\theta=kU_0\{P_0M-P_1(M+1)+\frac{3\lambda+2\mu}{3\mu}(P_0-P_1)(M+1)\}+\\+kV_0\{P_0N-P_1(N+1)+\frac{3\lambda+2\mu}{4\mu}(P_0-P_1)(N+1)\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Это уравненіе выражаетъ полное упругое расширеніе піезометра, которымъ мы будемъ часто пользоваться. Lamé [1]) написалъ его въ упрощенной формѣ:

$$\begin{aligned}\theta = kU_0\{P_0M - P_1(M+1) + \frac{5}{3}(P_0 - P_1)(M+1)\} + \\ + kV_0\{P_0N - P_1(N+1) + \frac{5}{4}(P_0 - P_1)(N+1)\},\end{aligned} \qquad (4')$$

которая получается изъ предъидущей при условіи

$$\lambda = \mu, \qquad (5)$$

эквивалентномъ

$$\sigma = 0.25.$$

Такое значеніе постоянной Poisson'а приписывали первоначально Navier, Poisson, а затѣмъ Barré de St.-Venant и Cornu.

3. Примѣнимъ это уравненіе къ опредѣленію коэффиціента кубической сжимаемости k по способу Regnault, причемъ назовемъ черезъ θ' то кажущееся увеличеніе объема W_0, которое мы наблюдаемъ въ капиллярѣ піезометра, подверженнаго одному внѣшнему давленію P_1.

Въ такомъ случаѣ $P_0 = 0$, и ур. (4) превращается въ:

$$\begin{aligned}\theta' = kU_0\{P_1(M+1) + \frac{3\lambda+2\mu}{3\mu}P_1(M+1)\} + \\ + kV_0\{P_1(N+1) + \frac{3\lambda+2\mu}{4\mu}P_1(N+1)\},\end{aligned}$$

откуда

$$P_1 k = \frac{\theta'}{(M+1)U_0\frac{3\lambda+5\mu}{3\mu} + (N+1)V_0\frac{3\lambda+6\mu}{4\mu}}, \qquad (6)$$

---

[1]) Regnault. Loc. cit., p. 441.

а при $\lambda = \mu$

$$P_1 k = \frac{\theta'}{\frac{8}{3}(M+1)U_0 + \frac{9}{4}(N+1)V_0}. \qquad (6')$$

Такимъ образомъ, чтобы опредѣлить кубическую сжимаемость k піезометра изъ послѣдняго уравненія достаточно одного описаннаго опыта и предварительнаго знанія размѣровъ сосуда, отъ которыхъ зависятъ величины M, N, U_0, V_0. Однако, строгое опредѣленіе коэффиціента k можетъ быть сдѣлано лишь по уравненію (6), для вычисленія котораго необходимо знать абсолютное значеніе постоянныхъ Lamé λ и μ, другими словами модуль Юнга и постоянную Poisson'а, съ которыми онѣ связаны ур. (1) и ур. (2). По этому способу коэффиціентъ кубической сжимаемости k былъ обстоятельно опредѣленъ самимъ Regnault [1]), затѣмъ Wertheim'омъ [2]) и Grassi [3]). Разница между этими измѣреніями состоитъ лишь въ томъ, что Regnault пользовался при вычисленіи своихъ опытовъ уравненіемъ (6'), а Wertheim [4]), занявшись обстоятельнымъ опредѣленіемъ абсолютной величины σ, замѣнилъ его новымъ, которое легко получить изъ ур. (6), положивъ въ немъ

$$\lambda = 2\mu, \qquad (7)$$

что соотвѣтствуетъ $\sigma = 0.33$.

Въ такомъ случаѣ уравненіе (6') принимаетъ слѣдующій видъ:

$$P_1 k = \frac{\theta'}{\frac{11}{3}(M+1)U_0 + \frac{12}{4}(N+1)V_0},$$

---

[1]) Regnault. Loc. cit., pp. 446, 450, 454, 461, таблицы №№ I, II, III, IV.

[2]) Wertheim. Annales de chim. et de phys., (3) t. 23, 1848, таблицы XII, XIII и XIV, pp. 90—94.

[3]) Grassi. Loc. cit., p. 448 etc.

[4]) Wertheim. См., кромѣ упомянутаго мемуара, еще: Annales de chim. et de phys., (3) t. 25, 1849, p. 209.

или

$$P_1 k = \frac{3\theta'}{11(M+1)U_0+9(N+1)V_0}. \qquad (6'')$$

Вотъ по этому-то уравненію Grassi и произвелъ вычисленіе кубической сжимаемости своихъ пяти піезометровъ.

Въ послѣднее время по способу Regnault были сдѣланы опредѣленія кубической сжимаемости стекла Amagat [1]) и мною.

4. Кромѣ этого способа, можно остановиться еще на другомъ, который также дается теоріей упругости, согласно которой [2])

$$k=3\alpha(1-2\sigma), \qquad (8)$$

или

$$k=\frac{3(1-2\sigma)}{E}, \qquad (9)$$

гдѣ E есть модуль Юнга.

Отсюда легко видѣть, что кубическую сжимаемость k можно вычислить, если извѣстны — модуль Юнга E и постоянная Poisson'а σ.

5. Модуль Юнга легче всего опредѣлить по растяженію α стержня или піезометрической трубы. Однако, если, повидимому, этотъ способъ и очень простъ, то на самомъ дѣлѣ слѣдуетъ его избѣгать, такъ какъ измѣряемое растяженіе есть величина слишкомъ малая и вліяніе ошибокъ, неизбѣжно сопровождающихъ ея измѣреніе, слишкомъ велико. Мнѣ кажется, что разногласіе, существующее между работами Wertheim'а и новѣйшими изслѣдованіями касательно сущности постоянной Poisson'а, отчасти объясняется выборомъ именно этой методы опредѣленія модуля Юнга.

---

[1]) Amagat. Journal de physique, (2) t. 8, 1889, p. 197; Annales de chim. et de phys., (6) t. 22, 1891, p. 101.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de physique. T. I, fas. II, 1882, p. 147.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ настоящее время ее мало-помалу оставляютъ; Amagat, много занимавшійся изученіемъ упругости твердыхъ тѣлъ, считаетъ, напримѣръ, совершенно невозможнымъ примѣненіе этой методы къ стеклянымъ стержнямъ и трубамъ, вслѣдствіе неправильности ихъ формы. Однако, онъ допускаетъ ея приложеніе къ металлическимъ стержнямъ, правильно обработаннымъ на токарномъ станкѣ; онъ [1]) даже самъ воспользовался ею, но въ значительно усовершенствованной формѣ, а именно, онъ очень остроумно примѣнилъ къ измѣренію удлиненія двойной сферометръ, а для опредѣленія момента соприкосновенія обоихъ винтовъ сферометра съ двумя особыми стойками прибора—два гальванометра.

6. Модуль Юнга съ бо́льшею точностью измѣряется по прогибанію стержня или трубы. Основываясь на этомъ принципѣ, опыту придаютъ три разныя формы:

a) стержень закрѣпляютъ неподвижно обоими концами, а прогибающій грузъ помѣщаютъ по серединѣ;

b) стержень закрѣпляютъ неподвижно однимъ концомъ, а грузъ вѣшаютъ на свободномъ концѣ;

c) стержень свободно лежитъ концами на призмахъ, а прогибающій грузъ помѣщается по серединѣ;

d) иногда непосредственно измѣряютъ прогибаніе, иногда же только уголъ гнутія.

Соотвѣтственно этимъ типичнымъ случаямъ употребляютъ различныя формулы, которыя даются во всѣхъ учебникахъ теоріи упругости [2]) для случаевъ, когда поперечныя сѣченія испытуемыхъ тѣлъ суть—квадратъ, прямоугольникъ, эллипсъ и кругъ, а болѣе сложныя задачи разобраны въ извѣстномъ мемуарѣ Barré de Saint-Venant [3])—«sur la fléxion des prismes».

---

[1]) Amagat. Journal de physique. (2) t. 8, 1889, p. 200.

[2]) Violle. Cours de physique. Tome I, Première partie. Paris, 1883, p. 443 etc.

[3]) Barré de Saint-Venant. Journal de Liouville. (2) t. 1, 1856.

7. Чтобы опредѣлить постоянную Poisson'а прибѣгаютъ къ различнымъ способамъ. Прежде всего замѣтимъ, что между модулемъ Юнга E, постоянной Lamé μ и постоянною Poisson'а σ существуетъ слѣдующая связь [1])

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{10}$$

и, стало-быть, опредѣленіе σ дѣлается помощью модуля Юнга E и постоянной μ, именуемой также модулемъ твердости. При этомъ модуль Юнга находятъ изъ гнутія стержней и трубъ, а модуль твердости изъ ихъ крученія.

Выборъ формулы, помощью которой можно было-бы опредѣлить μ, зависитъ отъ расположенія опыта и формы поперечнаго сѣченія стержней и трубъ [2]). Kirchhoff [3]) даже предложилъ одновременно подвергать испытуемыя тѣла гнутію и крученію; и послѣ него, эта метода считается наилучшею. Ею занимались многія лица: Купферъ [4]), Okatow [5]), Everett [6]), Voigt [7]), Baumeister [8]), Kiewit [9]), Kowalsky [10]) и теперь я—и нашли числа, которыя собраны мною въ нижеслѣдующей таблицѣ постоянныхъ Poisson'а (см. § 13 этой главы).

---

[1]) Violle. Loc. cit., p. 437.

[2]) Violle. Loc. cit., Première partie, p, 437.

[3]) Kirchhoff. Pogg. Ann., Bd. 108, 1859, p. 369.

[4]) Купферъ, А. Т. Опытныя изслѣдованія упругости металловъ. Спб. 1860 годъ.

[5]) Okatow. Pogg. Ann., Bd. 119, 1863, p. 11. Тоже по русски М. Окатовъ. Теорія равновѣсія и движенія упругой проволоки. Спб. 1867.

[6]) Everett. Philos. Transactions. Vol. 156, 1866, p. 185; Vol. 157, 1867, p. 139; Vol. 158, 1868, p. 363.

[7]) Voigt. Wied. Ann., Bd. 15, 1882, p. 497, кромѣ того, онъ помѣстилъ еще нѣсколько работъ въ Wied. Ann., списокъ которыхъ помѣщенъ въ его мемуарѣ, напечатанномъ въ Wied. Ann., Bd. 38, 1889, p. 573.

[8]) Baumeister. Wied. Ann., Bd. 18, 1883, p 578.

[9]) Kiewit. Wied. Ann., Bd. 29, 1886, p. 617.

[10]) Kowalsky. Wied. Ann., Bd. 36, 1889, p. 307 и Bd. 39, 1890, p. 155.

Нѣкоторые изслѣдователи пользовались формулою (10), но опредѣляли модуль упругости не по прогибанію стержней, а по ихъ вытяженію, или по звуковому способу (Wertheim, Kohlrausch und Loomis). Такая замѣна, вообще, нежелательна по мотивамъ, уже высказаннымъ въ § 5.

8. Второй способъ опредѣленія коэффиціента σ былъ предложенъ Regnault и выполненъ Wertheim'омъ[1]). Онъ состоитъ въ томъ, что длинный піезометръ, наполненный какою-либо жидкостью, закрѣпляется съ одного конца, а съ другаго вытягивается нѣкоторымъ грузомъ P, вслѣдствіе чего одновременно получается два эффекта, помощью которыхъ, во-первыхъ, легко опредѣлить коэффиціентъ удлиненія α, а во-вторыхъ, измѣненіе dU_0 внутренняго объема U_0. Отсюда приращеніе объема на единицу объема можетъ быть выражено двояко: съ одной стороны по измѣненію уровня получимъ $\frac{dU_0}{U_0P}$, а съ другой— изъ коэффиціентовъ продольнаго растяженія α и поперечнаго сокращенія β получимъ

$$(1+\alpha)\ (1-\beta)^2=1+\alpha-2\beta=\alpha(1-2\sigma). \qquad (11)$$

Приравнявъ эти два выраженія, найдемъ:

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\alpha(1-2\sigma), \qquad (12)$$

откуда

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\frac{1}{2}\alpha, \qquad (13)$$

если $\sigma=0.25$, и

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\frac{1}{3}\alpha, \qquad (14)$$

если $\sigma=0.33$.

Опыты, произведенные Wertheim'омъ съ 3 латунными и 4 хрустальными трубами, привели его къ заключенію, что $\sigma=0.33$.

[1]) Wertheim. Annales de chim. et de phys., (3) t. 23, 1848, p. 52.

Существенное возраженіе, которое Violle[1]) дѣлаетъ Wertheim'у, сводится къ тремъ замѣчаніямъ: 1-е—вблизи мѣтокъ, нанесенныхъ у оконечностей піезометра, измѣненіе объема иное, чѣмъ между мѣтками; 2-е—толщина стѣнокъ вдоль трубъ неодинакова, и насколько она неодинакова—этого Wertheim даже не изслѣдовалъ; 3-е—Wertheim не обратилъ никакого вниманія на термическія условія своихъ опытовъ. Сказаннаго достаточно, чтобы относиться съ большою осмотрительностью къ результатамъ его измѣреній. Въ томъ-же смыслѣ высказывается Amagat[2]), который этимъ способомъ недавно опредѣлилъ σ, k, E металловъ, но съ тѣмъ сферометрическимъ приспособленіемъ для измѣренія удлиненія α, о которомъ уже упомянуто въ § 5.

9. Третій способъ опредѣленія коэффиціента σ былъ также предложенъ Regnault[3]) и только недавно реализованъ Amagat[4]). Способъ этотъ состоитъ въ томъ, что только-что описанный піезометръ подвергается вытяженію грузомъ P, отчего мѣняется первоначальный цилиндрическій объемъ U_0 на величину dU_0, и тогда, какъ уже извѣстно изъ ур. (12),

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\alpha(1-2\sigma) \tag{12}$$

или же въ функціи постоянныхъ Lamé

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\frac{1}{3\lambda+2\mu}; \tag{15}$$

если-же этотъ самый піезометръ подвергнуть одному внѣшнему давленію P_1, то на основаніи урав. (6) измѣненіе объема $\theta'=dU'_0/U_0P_1$ выразится:

---

[1]) Violle. Loc. cit., p. 424.

[2]) Amagat. Journal de physique, (2) t. 8, 1889, p. 366.

[3]) Regnault. Loc. cit., pp. 457—459.

[4]) Amagat. Loc. cit., pp. 200—203.

$$\theta' = \frac{P_1 U_0 (M+1)\,(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)}, \qquad (16)$$

или же въ функціи коэффиціентовъ α и σ

$$\frac{dU'_0}{U_0 P_1} = \alpha(M+1)\,(5-4\sigma). \qquad (17)$$

Изъ уравненій (12) и (17) можно вычислить α и σ, или-же изъ уравненій (15) и (16)—λ и μ. Результаты измѣреній, сдѣланныхъ по этому способу изложены и уже приведены въ таблицѣ III § 32 первой главы, стр. 48.

10. Четвертый способъ основанъ на связи, существующей между звуковыми колебаніями даннаго тѣла и его упругими свойствами. Онъ примѣнялся къ опредѣленію модулей упругости многими лицами, и между прочими Wertheim'омъ, и состоитъ въ томъ, что изъ стержня извлекаютъ звуки при продольныхъ колебаніяхъ и при поперечныхъ. Изъ теоріи-же упругости вытекаетъ, что отношеніе числа колебаній стержня при продольномъ колебаніи n_l къ числу колебаній при крутильномъ его колебаніи n_t равно

$$\frac{n_l}{n_t} = \sqrt{\frac{E}{\mu}}. \qquad (18)$$

Замѣнивъ черезъ m отношеніе n_l къ n_t и вставивъ вмѣсто E равную ему величину изъ ур. (1), находимъ, что

$$m = \sqrt{\frac{3\lambda+2\mu}{\mu+\lambda}},$$

а отсюда

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{m^2-2}{3-m^2}. \qquad (19)$$

Но постоянная Poisson'a

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{2\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)}=\frac{m^2-2}{2}. \qquad (20)$$

Однако, счетъ числа колебаній довольно затруднителенъ, между тѣмъ какъ измѣреніе длины звуковыхъ волнъ по способу Kundt'а [1]) не представляетъ никакихъ затрудненій, поэтому Schneebeli [2]) опредѣлялъ m не по отношенію числа колебаній, а по отношенію длины волнъ λ_l и λ_t, помня, что

$$\frac{n_l}{n_t}=\frac{\lambda_l}{\lambda_t}=m, \qquad (21)$$

и нашелъ значеніе Poisson'овской постоянной σ для нѣсколькихъ стальныхъ стержней (см. таблицу постоянныхъ Poisson'а, § 13).

Я пробовалъ примѣнить этотъ способъ къ стеклянныхъ трубамъ, но мнѣ не удавалось при поперечномъ колебаніи извлечь звука такой силы, чтобы въ резонирующей трубѣ получить фигуры Kundt'а.

11. Еще одна метода опредѣленія σ была предложена Cantone'омъ [3]); онъ подвергалъ стеклянные піезометры то внутреннему, то внѣшнему давленію; при дѣйствіи внутренняго давленія піезометръ удлинялся, и онъ измѣрялъ по оптическому способу Fizeau коэффиціентъ удлиненія α, а при дѣйствіи внѣшняго получалъ уже извѣстное соотношеніе (ур. 17). Для четырехъ трубъ онъ нашелъ $\sigma=0.257$.

12. Слѣдуетъ, наконецъ, упомянуть о существованіи оптической методы опредѣленія σ, которая была испытана Cornu [4]).

---

[1]) Kundt. Pogg. Ann., Bd. 127, 1868, p. 497.

[2]) Schneebeli. Pogg. Ann., Bd. 140, 1870, p. 598.

[3]) Amagat. Loc. cit., p. 366.

[4]) Cornu. Comptes rendus. T. 69, 1869, p. 333.

Къ сожалѣнію, она не приложима къ трубамъ, а только къ пластинкамъ, и состоитъ въ томъ, что испытуемую пластинку ставятъ горизонтально на двѣ подставки и нагружаютъ ее у концовъ, вслѣдствіе чего ея середина выгибается и получается между нею и другою плоскою прозрачною пластинкою, расположенною вблизи, окрашенная система сопряженныхъ гиперболъ съ общими ассимптотами. Эти фигуры Cornu фотографировалъ и затѣмъ микрометрически опредѣлялъ тангенсъ угла ψ, составленнаго ассимптотою съ направленіемъ оси призмы, такъ какъ согласно одной теоремѣ S^t Venant'a [1])

$$tg^2\psi = \frac{2(\mu+\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\sigma}. \qquad (22)$$

Cornu нашелъ для 6 пластинокъ стекла St Gobain $\sigma = 0.237$.

13. Раньше, чѣмъ покончить съ вопросомъ объ опредѣленіи числоваго значенія постоянной Poisson'a, я приведу еще имена тѣхъ экспериментаторовъ, которые занимались разъисканіемъ его не для стекла, а для другихъ твердыхъ тѣлъ; сюда, насколько мнѣ извѣстно, относятся Cagnard de la Tour [2]), Wertheim [3]), F. Neumann [4]), Maxwell [5]), Kohlrausch [6]), Villari [7]), Röntgen [8]), Mallock [9]), Littmann [10]), Maurer [11]), Pulfrich [12]), а въ слѣдующей таблицѣ помѣщу числа найденныя, какъ ими, такъ и тѣми, о которыхъ я уже имѣлъ случай раньше упомянуть.

---

[1]) F. Neumann. Vorlesungen über die Theorie der Elasticität. Leipzig, 1885, p. 162.

[2]) Poisson. Annales de chim. et de phys., (2) t. 36, 18, 27, p. 384.

[3]) Wertheim. Wüllner. Lehrbuch der Experimentalphysik. Bd. I. Leipzig, 1874, p. 203.

[4]) F. Neumann. Loc. cit., p. 138.

[5]) Everett. Phil. Transactions. Vol. 156, 1866, p. 191.

[6]) Kohlrausch und Loomis. Pogg. Ann., Bd. 141, 1870, p. 481.

[7]) Villari. Pogg. Ann., Bd. 143, 1871, pp. 88 и 290.

[8]) Röntgen. Pogg. Ann., Bd. 159, 1876, p. 601.

[9]) Mallock. Proc. Royal Society. Vol. 29, 1879, p. 157.

[10]) Littmann. Beiblätter. Bd. 9, 1885, p. 611.

[11]) Maurer. Wied. Ann., Bd. 28, 1886, p. 628.

[12]) Pulfrich. Wied. Ann., Bd. 28, 1886, p. 87.

Таблица V постоянныхъ Poisson'а для различныхъ твердыхъ тѣлъ.

1. *Стекло.*

Имена	Родъ стекла	Постоянная σ
Wertheim.......	Хрусталь Choisy-le-Roi.	0.321
Maxwell	Неизвѣстное	0.332
Everett	Флинтгласъ № I, James Couper & Sons, Glasgow	0.258
Everett	Флинтгласъ № II, A & R Cochran, Glasgow ..	0.229
Cornu	Saint Gobain........	0.237
Voigt	Guinand à Paris	0.213
Voigt	Рейнское	0.208
Amagat	Обыкновенное французск.	0.245
Amagat	Хрусталь Guilbert-Martin	0.250
Cantone	Неизвѣстное	0.257
Kowalsky, 1889 .	Greiner und Friedrichs.	0.226
Kowalsky, 1890 .	Greiner und Friedrichs.	0.212
De-Metz	Greiner und C^{ie}	0.237
De-Metz	Gundelach..........	0.235
	Среднее..	0.247

2. *Сталь.*

Имена	постоян. σ
Wertheim..........	0.310
Kirchhoff..........	0.294
Okatow......... ..	0.275
Okatow.............	0.303
Everett............	0.310
Schneebeli	0.296
Schneebeli	0.303
Mallock	0.253
Amagat	0.269
Среднее	0.290

3. *Желѣзо.*

Имена	постоян. σ
Wertheim..........	0.320
Neumann	0.250
Maxwell	0.267
Everett............	0.275
Baumeister	0.308
Littmann	0.236
Littmann	0.243
Среднее	0.271

4. *Чугунъ.*

Имена	постоян. σ
Everett............	0.267

Таблица V постоянныхъ Poisson'а для различныхъ твердыхъ тѣлъ.

5. *Мѣдь.*

Имена	постоян. σ
Wertheim	0.300
Everett	0.378
Mallock	0.348
Voigt	0.336
Kiewit	0.320
Amagat	0.327
Среднее	0.335

8. *Латунь.*

Имена	постоян. σ
Wertheim	0.330
Kirchhoff	0.389
Everett	0.469
Mallock	0.325
Baumeister	0.410
Littmann	0.239
Littmann	0.226
Amagat	0.327
Среднее	0.352

6. *Цинкъ.*

Имена	постоян. σ
Mallock	0.180
Mallock	0.230
Kiewit	0.330
Среднее	0.246

9. *Каучукъ.*

Имена	постоян. σ
Wertheim	0.330
Villari	0.333 0.167
Röntgen	0.500
Mallock	0.500
Среднее	0.356

7. *Свинецъ.*

Имена	постоян. σ
Mallock	0.375
Amagat	0.428
Среднее	0.401

10. *Металлъ Delta.*

Имена	постоян. σ
Amagat	0.340

11.

Различ. тѣла	постоян. σ
Каменная соль	.... 0.252
Сильвинъ	.... 0.186
Бериллъ	.... 0.255
Горный хруст.	Voigt 0.068
Известк. шпатъ	.... 0.269
Топазъ	.... 0.220
Баритъ	.... 0.292

12.

Различ. тѣла	постян. σ
Пробка	...... 0.000
Парижск. гипсъ	...... 0.181
Эбонитъ	Mallock 0.389
Слоновая кость	...... 0.500
Параффинъ	...... 0.500
Желатина	Maurer 0.500

14. Числа, приведенныя въ послѣдней таблицѣ, позволяютъ намъ провѣрить нѣкоторые выводы той части теоріи упругости, въ которой различныя лица пытались установить зависимость между коэффиціентами продольнаго растяженія α и поперечнаго сокращенія β изотропнаго твердаго тѣла. Вначалѣ Navier, Poisson, Lamé и Clapeyron принимали, что это отношеніе есть четверть, но впослѣдствіи Cauchy показалъ, что оно можетъ быть какимъ угодно, въ зависимости отъ рода даннаго тѣла. Это мнѣніе встрѣтило поддержку въ позднѣйшихъ трудахъ Lamé, а затѣмъ Kirchhoff'а и другихъ выдающихся физиковъ и геометровъ прошлаго и нашего времени. Совокупными трудами имъ удалось установить, что, такъ называемая, постоянная Poisson'а σ не можетъ быть ни постоянною для всѣхъ твердыхъ тѣлъ, ни равною четверти, но перемѣнною въ предѣлахъ отъ нуля до половины.

Lamé[1]) прямо говоритъ: «Нельзя допустить соотношенія $\lambda = \mu$ (т. е. $\sigma = 0.25$), которое необходимо опирается на гипотезу непрерывности вещества въ твердыхъ тѣлахъ. Результаты опытовъ Wertheim'а ясно показываютъ, что отношеніе λ къ μ не есть единица, и не приписываютъ, какъ кажется, этому отношенію другой постоянной и вполнѣ опредѣленной величины. Мы сохранимъ поэтому два коэффиціента, оставивъ ихъ отношеніе неопредѣленнымъ». Обзоръ значеній σ, дѣйствительно, оправдываетъ послѣднее воззрѣніе, такъ какъ мы встрѣчаемъ и $\sigma = 0$, и $\sigma = 0.50$. Однако, возможно и иначе смотрѣть на этотъ вопросъ. Barré de Saint-Venant считаетъ $\sigma = 0.25$, или $\lambda = \mu$ для всякаго истинно изотропнаго тѣла, того-же мнѣнія Cornu, Voigt и Mercadier[2]); они полагаютъ, что если въ данномъ тѣлѣ коэффиціентъ σ не равенъ четверти, то этимъ самымъ доказывается только отсутствіе въ немъ изотропіи. Voigt[3]) мотиви-

---

[1]) Lamé. Leçons sur l'élasticité des corps solides. Loc. cit., p. 51.

[2]) Mercadier. Comptes rendus. T. 105, 1887, p. 105.

[3]) Voigt. Wied. Ann., Bd. 38, 1889, p. 573.

руетъ свое мнѣніе тѣмъ фактомъ, что, такъ называемыя, изотропныя тѣла въ огромномъ большинствѣ случаевъ обладаютъ кристаллическою структурою съ тою, однако, особенностью, что отдѣльные кристаллики, ихъ составляющіе, оріентированы по всевозможнымъ направленіямъ. Нужно замѣтить, что это воззрѣніе на природу твердыхъ тѣлъ не ново, и что Savart [1]) уже давно развилъ его на основаніи своихъ разнообразныхъ акустическихъ изслѣдованій, причемъ онъ отвелъ почтенное мѣсто вопросу, насколько механическія операціи — ковки, прокатыванія и т. п., измѣняютъ изотропію даннаго тѣла. Отсюда уже видно, съ какою осторожностью нужно принимать данное тѣло за изотропное, и вотъ Voigt предлагаетъ считать тѣла съ неопредѣленнымъ кристаллическимъ строеніемъ — тѣлами quasi-изотропными въ отличіе отъ дѣйствительно изотропныхъ. Онъ приписываетъ quasi-изотропнымъ тѣламъ свойство полярности, которое состоитъ въ томъ, что ихъ молекулы дѣйствуютъ другъ на друга не только въ зависимости отъ ихъ взаимнаго разстоянія, но также въ зависимости и отъ направленія соединяющей ихъ линіи. Этимъ мыслямъ Voigt далъ аналитическое выраженіе, которое привело его къ заключенію: 1-е, что тѣла, не обладающія полярностью, дѣйствительно характеризуются $\sigma = 0.25$, и 2-е, что изотропныя тѣла, состоящія изъ кристаллическихъ индивидуумовъ — большихъ по сравненію съ сферою молекулярнаго дѣйствія, но малыхъ по сравненію съ размѣрами цѣлаго тѣла —, и обладающія полярностью, не имѣютъ никакого опредѣленнаго численнаго отношенія между обѣими постоянными упругости.

Подводя итоги всему сказанному относительно числоваго значенія коэффиціента σ, который входитъ въ наши формулы, и примѣняя ихъ къ стекляннымъ піезометрамъ, мы считаемъ возможнымъ согласиться съ Cornu и признать стекло тѣломъ изотропнымъ,

---

[1]) Savart. Pogg. Ann., Bd. 16, 1829, p. 248.

потому-что среднее значеніе $\sigma = 0.247$ близко къ теоретическому $\sigma = 0.25$. Такимъ образомъ, мы позволимъ себѣ пользоваться упрощенными формулами Lamé, принявъ $\lambda = \mu$. Въ концѣ третьей главы мы постараемся оправдать такое допущеніе.

15. Третій способъ опредѣленія кубической сжимаемости твердаго тѣла былъ недавно предложенъ и испробованъ въ Англіи—Buchanan'омъ [1]) и Tait'омъ [2]), а во Франціи—Amagat [3]). Онъ имѣетъ огромное преимущество передъ двумя предъидущими по простотѣ своего замысла и по точности; состоитъ же онъ въ томъ, что стержень погружается въ цилиндръ, который весь наполненъ какою-либо жидкостью, и въ которомъ можно производить какое угодно давленіе помощью насоса. Заключенный въ цилиндрѣ стержень испытываетъ гидростатическое давленіе со всѣхъ сторонъ и единица его длины на единицу давленія сокращается на α', а отсюда коэффиціентъ кубической сжимаемости

$$k = 3\alpha'. \tag{22}$$

Такимъ образомъ Buchanan нашелъ для хрусталя

$$k = 0.00000292,$$

а Tait

$$k = 0.00000270.$$

Amagat производилъ свои опыты въ предѣлахъ давленій отъ 1 атм. до 2000 атм. и не замѣтилъ почти никакого измѣненія въ величинѣ коэффиціента k.

Вотъ его результаты при 12° C.

---

[1]) Buchanan. Beiblätter. Bd. 5, 1881, p. 172.

[2]) Tait. Beiblätter. Bd. 14, 1890, p. 707.

[3]) Amagat. Journal de physique. Loc. cit., p. 362.

Таблица VI коэффиціентовъ кубической сжимаемости стекла и хрусталя.

Давленіе въ атм.	Сокраще-ніе α'	Стекло	Хрусталь
1—500	0.0_6750	0.0_52250	0.0_52454
1—1000	746	2248	2424
1—1500	745	2235	2415
1—2000	743	2229	2406

16. Насколько мнѣ извѣстно, изложенные здѣсь способы опредѣленія кубической сжимаемости твердыхъ тѣлъ обнимаютъ собою наилучшія изслѣдованія новѣйшихъ временъ.

Теперь мнѣ остается только составить таблицу коэффиціентовъ k, собранныхъ мною изъ разныхъ изслѣдованій, причемъ я ограничиваюсь лишь стекломъ и тѣми числами, которыя добыты путемъ прямыхъ измѣреній, а чтобы получить болѣе ясное представленіе о предѣльныхъ значеніяхъ этого коэффиціента, я разгруппирую всѣ данныя по родамъ стекла.

Таблица VII кубической сжимаемости k стекла и хрусталя.

Имена	Хрусталь	k
Wertheim.......	Baccarat	0.000002823
Wertheim.......	Choisy-le-Roi....	0.000002601
Grassi...........	Choisy-le-Roi....	0.000002883
Everett.........	Флинтъ № II Cochran	0.000002930
Everett.........	Флинтъ I Couper..	0.000002487
Voigt..........	Guinand à Paris..	0.000002750
Buchanan........	?	0.000002920
Tait...........	?	0.000002700
Amagat.........	Guilbert-Martin...	0.000002425
De-Metz	Французскій......	0.000002890

Среднее 0.000002740

Таблица VII кубической сжимаемости k стекла и хрусталя.

Нѣмецкое простое стекло		k
Voigt..........	Rheinisches......	0.00000246
Kowalsky	Greiner & Friedricks	0.00000253
De-Metz........	Gundelach.......	0.00000246
De-Metz........	Greiner & C[ie]	0.00000231

Среднее 0.000002435

Французское простое стекло.	k
Regnault..........	0.000002371
Wertheim..........	0.000002290
Wertheim..........	0.000002132
Grassi............	0.000002264
Dupré und Page....	0.000002000
Amagat...........	0.000002225

Среднее 0.000002214

17. Мы представили въ §§ 11, 21, 22 главы I-й изслѣдованія Amagat, Pagliani e Vicentini, Grassi и нѣкоторыхъ другихъ лицъ, въ которыхъ изучалось вліяніе температуры на сжимаемость жидкаго тѣла. Поэтому становится очевиднымъ вопросъ: каково же вліяніе температуры t на кубическую сжимаемость k стѣнокъ стеклянаго піезометра? Отвѣты на этотъ вопросъ могутъ быть найдены на основаніи изслѣдованій Grassi, Pagliani e Vicentini, Kowalsky и Amagat. Grassi опредѣлялъ коэффиціентъ k по способу Regnault одновременно съ коэффиціентомъ кажущейся сжимаемости χ_a воды и изъ нихъ находилъ коэффиціентъ χ_r. Къ сожалѣнію, изъ многихъ чиселъ Grassi, раз-

сѣянныхъ въ таблицахъ піезометра A, сдѣланнаго изъ хрусталя Choisy-le-Roi, нельзя вывести никакого яснаго заключенія о взаимной связи между величинами k и t. Въ самомъ дѣлѣ вотъ его числа:

Таблица VIII кубической сжимаемости хрусталя при разныхъ температурахъ.

t^0 C.	0	8.5	17.5	25.9	34.5	41	53.3
$k \times 10^8$	280	286	282	282	284	287	286

По упомянутымъ изслѣдованіямъ Pagliani e Vicentini кубическая сжимаемость возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры, хотя и весьма слабо, именно:

t	k[1])
0°	0.0000019
100° C.	0.0000022

Kowalsky [2]), собственно говоря, не задавался рѣшеніемъ интересующаго насъ вопроса, но въ одной его работѣ мы находимъ всѣ данныя для точнаго рѣшенія этой задачи, такъ какъ онъ эмпирически опредѣлилъ соотношенія съ одной стороны между модулемъ Юнга E и температурой въ предѣлахъ 9° C. — 200° C., а съ другой стороны между твердостью μ и температурою въ предѣлахъ 16° C.—100° C. Результаты своихъ измѣреній онъ выразилъ слѣдующими формулами:

[1]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 34 1888, p. 965.
[2]) Kowalsky. Wied. Ann., Bd. 39, 1890, p. 155.

$$E = 6770\ (1-0.00106\ t)\,, \tag{23}$$

$$\mu = 2792\ (1-0.00151\ t)\,, \tag{24}$$

которыми легко воспользоваться слѣдующимъ образомъ.

Извѣстно, что[1])

$$2(1+\sigma) = \frac{E}{\mu}, \tag{25}$$

а

$$k = \frac{3(1-2\sigma)}{E}0.010333, \tag{26}$$

если за единицу давленія принимать не киллограммъ, а атмосферу, и слѣдовательно

$$k = \frac{9\mu-3E}{E\mu}0.010333; \tag{27}$$

сдѣлавъ по этой формулѣ вычисленія для $t=0^0, 50^0$ и 100^0, я нашелъ:

t^0 C.	$k\times10^7$
0	26.32
50	25.05
100	22.86

откуда среднее $\Delta=0.035\times10^7$ на 1^0 C.

Изъ этихъ чиселъ мы заключаемъ, что кубическая сжимаемость па̀даетъ съ возрастаніемъ температуры, хотя тоже очень ничтожно, около 0.1% на 1^0 C. Мнѣ остается, наконецъ, упомянуть о еще неоконченной работѣ Amagat[2]), въ ко-

[1]) Violle. Cours de physique. Première partie, p. 437.

[2]) Amagat. Comptes rendus. T. 110, 1890, p. 1246.

торой приведена только часть полнаго опредѣленія сжимаемости отъ 0° С. до 200° С., и изъ которой пока нельзя вывести окончательнаго заключенія объ измѣненіи коэффиціента *k* съ измѣненіемъ температуры.

Его метода та-же, которую онъ употреблялъ для опредѣленія кубической сжимаемости піезометра при комнатной температурѣ въ 15° С.

Позволю себѣ привести только заключительныя слова его мемуара[1]: «Во всякомъ случаѣ, говоритъ Amagat, для обыкновеннаго стекла, которымъ вообще теперь пользуются, измѣненія коэффиціента сжимаемости, даже до 200° С., какъ кажется, не способно повлечь за собою грубыхъ ошибокъ при вычисленіи деформаціи стѣнокъ; допуская пропорціональность между изучаемою деформаціею и этимъ коэффиціентомъ, равнымъ 0.0000022, мы дѣлаемъ ошибку въ 0.00028 при опредѣленіи объема, когда температура равна 200°, а давленіе 1000 атм.; въ изслѣдованіяхъ этого вопроса было-бы совершенно обманчиво стараться придавать ей значеніе».

---

[1]) Amagat. Loc. cit. p. 1249.

ГЛАВА III.

Результаты собственныхъ изслѣдованій сжимаемости ртути и стекла.

1. Задача, которую я себѣ поставилъ, состоитъ въ одновременномъ приложеніи нѣсколькихъ методъ для рѣшенія вопроса объ абсолютномъ коэффиціентѣ сжимаемости ртути съ цѣлью узнать, которая изъ методъ — Regnault или Jamin'a — приводитъ къ истинному рѣшенію. Я избралъ ртуть, какъ объектъ своего изслѣдованія, по двумъ причинамъ: во-первыхъ, потому что, какъ указано въ: § 8, стр. 10; § 9, стр. 13; § 10, стр. 16; § 12, стр. 19, главы I-й, различные авторы приписываютъ ей слишкомъ отличающіеся другъ отъ друга коэффиціенты сжимаемости; а во-вторыхъ, и потому, что на такомъ мало-сжимающемся тѣлѣ строже всего можно провѣрить относящіяся сюда формулы теоріи упругости.

2. Прежде чѣмъ приступить къ этому изслѣдованію я запасся такимъ количествомъ ртути, которое хватило мнѣ на все мое изслѣдованіе, и составилъ себѣ планъ, который состоялъ въ томъ:

а) что я приготовилъ себѣ четыре цилиндрическихъ піезометра съ полусферическими основаніями изъ нѣмецкаго стекла со стѣнками различной толщины отъ 1.4 m.m. до 2.9 m.m.[1]);

---

[1]) Я считаю своимъ пріятнымъ долгомъ выразить здѣсь благодарность мастеру E. Kern'у, который приготовилъ мнѣ эти піезометры и вообще своимъ искусствомъ былъ мнѣ очень полезенъ.

b) что каждый піезометръ былъ изслѣдованъ по методѣ Regnault

c) и одновременно—по методѣ Jamin'а;

d) что на основаніи данныхъ по наблюденіямъ b) и c) и уравненія полнаго упругаго расширенія піезометра я вычислялъ еще разъ коэффиціентъ абсолютной сжимаемости;

e) сопоставленіе окончательныхъ чиселъ коэффиціента абсолютной сжимаемости ртути, полученныхъ по упомянутымъ тремъ способамъ, должно было рѣшить вопросъ: которая изъ двухъ методъ вѣрная, и въ чемъ состоитъ ошибка той, которую нужно считать невѣрной.

3. Изслѣдованія Wild'а и Marek'а показали, что различные способы очистки ртути способны вліять на ея удѣльный вѣсъ и, быть-можетъ, на другія ея физическія свойства.

Wild [1]) высказывается за очистку ртути путемъ дистилляціи въ аппаратѣ Weinhold'а, наполненномъ угольной кислотой, разрѣженной до 10 m.m., а Marek [2]) рекомендуетъ точное опредѣленіе ея удѣльнаго вѣса и, если онъ окажется

$$d_0=13.5956 \text{ при } 0^\circ,$$

то считать данную ртуть абсолютно чистою.

Ртуть, которою я наполнилъ свои піезометры, была подвергнута слѣдующей очисткѣ:

a) промыта въ растворѣ азотной кислоты, въ водѣ, въ растворѣ ѣдкаго кали, обильно въ водѣ и просушена;

b) такая ртуть затѣмъ подвергалась въ теченіи сутокъ окисленію токомъ воздуха по способу Th. M. Crafts'а [3]), причемъ получилась еще значительная кора на ея поверхности;

---

[1]) Wild. Repertorium für Meteorologie. St.-Petersburg. Bd. III, 1874, p. 10—12, p. 42—50.

[2]) Marek. Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures. Paris, 1883, p. D. 58.

[3]) Th. M. Crafts. Beiblätter. Bd. 14, 1890, p. 1176.

и с) наконецъ, она была продистиллирована въ пустотѣ при столь низкой температурѣ, что было только обильное испареніе ея, но не кипѣніе [1]).

Опредѣливъ въ заключеніе плотность этой ртути помощью пикнометра [2]) я нашелъ

$$d_0 = 13.5958 \text{ при } 0^\circ,$$

число весьма близкое къ числу вышеприведенному, которое Wild и Marek считаютъ истиннымъ.

Приведу здѣсь рядъ чиселъ, характеризующихъ плотность ртути при 0°, согласно изслѣдованіямъ нижеслѣдующихъ лицъ:

Regnault [3])	$d = 13.5959$
Kupffer [4])	$d = 13.5988$
Wild [5])	$d = 13.5956$
Volkmann [6])	$d = 13.5953$
Sainte-Clair Deville [7])	$d = 13.5976$
Marek [8])	$d = 13.5956$

О хорошемъ качествѣ моей ртути можно было судить не только по ея удѣльному вѣсу, но также и по тому обстоятельству,

---

[1]) Очистки по послѣднимъ двумъ способамъ сдѣланы въ Лабораторіи Технической Химіи при любезномъ содѣйствіи ея лаборанта Е. В. Вернера, за что приношу ему здѣсь свою искреннюю благодарность.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de physique. T. II, fas. I, 1878, p. 140.

[3]) Regnault. Ann. de chimie et de physique, (2) t. 14, p. 236.

[4]) Kupffer. Ann. de chimie et de physique, (2) t. 40, p. 285.

[5]) Wild. H. Bericht über die Arbeiten zur Reform der Schweizerischen Urmaasse. Zürich, 1868, p. 139.

[6]) Volkmann. Wied. Annalen, Bd. XIII, 1881, p. 209.

[7]) H. Sainte-Clair Deville et E. Mascart. Sur la construction de la Règle géodésique internationale. Paris, 1879.

[8]) Marek, loc. cit., p. D. 58.

что во время наполненія піезометровъ я не замѣчалъ ни малѣйшаго прилипанія ея не только къ стѣнкамъ широкой части сосуда, но даже и капилляра, не смотря на весьма энергичное кипяченіе, продолжавшееся около часу.

4. Прежде чѣмъ наполнять піезометры ртутью, я промывалъ ихъ весьма тщательно слѣдующими жидкостями и въ слѣдующемъ порядкѣ: растворомъ ѣдкаго кали, дистиллированною водою, растворомъ амміака и обильно дистиллированною водою, послѣ чего просушивалъ ихъ токомъ сухаго воздуха помощью водяной помпы Bunsen'a. Чтобы удобно и безъ значительной потери времени выполнить эти манипуляціи, я получалъ піезометры отъ мастера не вполнѣ оконченными, именно незапаянными съ конца a (фиг. 2); онъ ихъ запаивалъ въ лабораторіи послѣ промывки и просушки, подъ моимъ надзоромъ, причемъ обращалось особое вниманіе на то, чтобы какъ нижнее донышко a, такъ и верхнее b—были-бы по возможности одинаковой толщины съ толщиною цилиндрической стѣнки каждаго піезометра.

Самое наполненіе ихъ ртутью совершалось слѣдующимъ образомъ: піезометръ въ формѣ $abcde$ (фиг. 2) состоялъ изъ резервуара ab, длиннаго капилляра bc и расширенной камеры cd, которая оканчивалась трубкою de и соединялась съ ненарисованнымъ здѣсь воздушнымъ насосомъ Carré. Въ камеру cd вливалось такое количество ртути, чтобы ею могъ наполниться весь резервуаръ ab, и чтобы получился еще значительный остатокъ ея въ камерѣ; послѣ этого выкачивался воздухъ до 1 m.m. и начиналось подогрѣваніе всего прибора. Удобнѣе и безопаснѣе всего, какъ показалъ мнѣ опытъ, нагрѣваніе совершалось тогда, когда весь піезометръ $abcde$ лежалъ въ наклонномъ положеніи на желѣзномъ полуцилиндрѣ MN, выстланномъ асбестовымъ картономъ и изолированномъ, кромѣ того, въ точкахъ o, p, q тремя асбестовыми кольцами.

Полуцилиндръ MN накрывался соотвѣтственною крышкою, а горѣлка Bunsen'a о четырехъ большихъ пламенахъ помѣща-

лась въ наиболѣе низкомъ концѣ его *M*. При этомъ образовывалось теченіе вверхъ *N* горячаго воздуха, температура котораго въ моихъ опытахъ доходила до 250° C.; минутъ черезъ 15—20 обыкновенно наступало кипѣніе во всей массѣ ртути —въ резервуарѣ *ab* и камерѣ *cd*—, и я давалъ ей кипѣть еще минутъ 10—15, послѣ чего тушилъ газъ и оставлялъ піезометръ медленно охлаждаться и наполняться ртутью. Однако, я убѣдился на первыхъ-же порахъ, что одного такого кипяченія недостаточно; при внимательномъ обслѣдованіи піезометра всегда въ резервуарѣ *ab* можно было замѣтить микроскопическій пузырекъ, вѣрнѣе точку, воздуха, который окончательно исчезалъ только послѣ повторительнаго кипяченія.

Когда піезометръ бывалъ окончательно наполненъ ртутью, камера *cd* срѣзывалась у точки *c*, а на ея мѣсто припаивался капилляръ, тщательно раздѣленный и градуированный. Эту операцію весьма искусно дѣлалъ мастеръ Кернъ при мнѣ, и она не могла оказать никакого дурнаго вліянія на мои измѣренія, потому что для совершенія ея, онъ понижалъ уровень ртути въ капиллярѣ *bc* всего на 2—3 cm. около точки спая *c*. Этотъ пріемъ слѣдуетъ даже рекомендовать, потому-что онъ даетъ возможность содержать градуированный капилляръ въ большой чистотѣ; и, благодаря ему, я срѣзывалъ градуированный капилляръ всякій разъ, когда онъ мнѣ казался недостаточно сухимъ.

5. Послѣ этого піезометръ вправлялся на обыкновенномъ хорошемъ сургучѣ въ металлическій патронъ *aabb* фиг. 3-й, какъ это уже описано мною раньше[1]), причемъ въ потлѣ патрона на сургучѣ замастиковывалось верхнее полусферическое основаніе *b* піезометра изъ-за необходимости предохранить его отъ излома, которому онъ неизбѣжно подверженъ при самомъ

---

[1]) Де-Метцъ. Опытное изслѣдованіе механическихъ свойствъ маселъ и коллоидовъ. Зап. Нов. Общ. Естеств., т. IX, 1889, стр. 139, § 47, а также G. De-Metz, Wied. Ann., Bd. 41, p. 665, §§ 6 и 7.

ничтожномъ толчкѣ, если онъ укрѣпленъ только на капиллярѣ. Чтобы не повторяться здѣсь, я упомяну вкратцѣ только о тѣхъ инструментахъ, которыми я пользовался при исполненіи этой работы.

a) Давленіе до 9.3 атмосферъ производилось насосомъ Cailletet, см. loc. cit. § 45.

b) Оно измѣрялось воздушнымъ манометромъ съ помощью сифоннаго ртутнаго, см. §§ 49—52; въ маншонъ воздушнаго манометра была налита вода для сохраненія постоянной температуры.

c) Температура ванны,—въ которую былъ погруженъ піезометръ, вправленный въ стальной цилиндръ *BB* (фиг. 3),— измѣрялась термометромъ Alvergniat, раздѣленнымъ до 0.02° C.; температура-же маншона — простымъ термометромъ, раздѣленнымъ на цѣлые градусы; нѣсколько измѣреній было произведено при температурѣ тающаго льда.

d) Градуированный капилляръ *C* піезометра заключалъ въ одномъ дѣленіи своемъ 0.26386 m.m.³, т. е.

$$\beta = 0.26386 \text{ m.m.}^3 \pm 0.00028 \text{ m.m.}^3,$$

причемъ разстояніе между послѣдовательными штрихами его было равно 1.5 m.m., такъ что оцѣнка глазомъ 0.1 дѣленія была выполняема безъ особыхъ затрудненій. Эта трубка припаивалась послѣдовательно ко всѣмъ піезометрамъ, потому-что она отличалась особою правильностью цилиндрической формы на всемъ своемъ протяженіи.

e) Градуированный капилляръ γ поправочной трубки былъ менѣе чувствителенъ, именно

$$\beta_1 = 1.0038 \text{ m.m.}^3 \pm 0.0001 \text{ m.m.}^3.$$

Сначала я приготовилъ поправочную трубку той-же чувствительности, какъ и при піезометрѣ, но пользованіе ею оказалось невозможнымъ вслѣдствіе того, что движеніе водяной

колонки шло толчками и неправильно; я думалъ устранить это препятствіе замѣною воды ртутью, но это ни къ чему не привело. Должно полагать, что замѣченное явленіе обусловливается значительнымъ поверхностнымъ натяженіемъ, хотя въ капиллярѣ C оно не обращаетъ на себя вниманія; вѣроятно, оно ослабляется разностью тѣхъ давленій, подъ дѣйствіемъ которыхъ находится менискъ въ піезометрѣ, между тѣмъ какъ въ поправочной трубкѣ разность давленій ничтожна. Вотъ почему мнѣ пришлось замѣнить узкую трубку болѣе широкою, около 0.41 m.m. въ радіусѣ; при такой ширинѣ описаннаго явленія уже не наблюдалось, и ходъ водяной колонки былъ совершенно правиленъ. Кромѣ того, я долженъ упомянуть, что въ теченія всего нынѣшняго изслѣдованія поправочная трубка стояла горизонтально, а не вертикально, какъ въ моихъ предъидущихъ опытахъ.

Интересно сопоставить чувствительность моихъ измѣреній съ чувствительностью измѣреній моихъ предшественниковъ, причемъ подъ этимъ терминомъ я буду понимать отношеніе одного дѣленія капилляра къ полному внутреннему объему:

Regnault[1]............	0.000009390
Grassi[2]............	0.000011221
Dupré und Page[3]......	0.000004620
Amagat[4]............	0.000932500
Amagat[4]............	0.000176200
Drecker[5]............	0.000006400
Drecker[6]............	0.000006100

[1]) Regnault. Mémoires de l'Institut. Loc. cit., p. 425.
[2]) Grassi. Loc. cit., p. 445; піезометръ A.
[3]) Dupré und Page. Pogg. Ann., Erg. Bd. V, 1871, p. 237.
[4]) Amagat. Annales de chim. et de phys. (5) t. 11, 1877, p. 529.
[5]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 20, 1883, p. 879.
[6]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 34, 1888, p. 954.

De-Metz, I	0.00000457
De-Metz, II	0.00000601
De-Metz, III............	0.00000597
De-Metz, IV............	0.00000797

Изъ этихъ чиселъ видно, что мои піезометры принадлежали къ числу болѣе чувствительныхъ, въ особенности если принять во вниманіе, что каждое мое дѣленіе имѣло 1.5 m.m. длины, и что, слѣдовательно, оцѣнка десятой доли была очень надежна.

f) Между насосомъ Cailletet и приборомъ нужно было установить такія соединенія, чтобы можно было оперировать по способу Regnault и по способу Jamin'a.

Переходя отъ Jamin'a къ Regnault, я замѣнялъ поправочную трубку γ (фиг. 3) мѣдною, которая однимъ концомъ привинчивалась къ винту G цилиндра BB, а другимъ къ соотвѣтственному мѣсту насоса. При этомъ условіи давленіе насоса передавалось черезъ отверстіе f внутрь піезометра, а черезъ отверстіе G внѣшней его поверхности, и наблюдалась кажущаяся сжимаемость жидкости по пониженію уровня θ''. Чтобы измѣрить кубическую сжимаемость стекла, характеризуемую по методѣ Regnault перемѣщеніемъ уровня θ', соединеніе между отверстіемъ f и насосомъ уничтожалось, вслѣдствіе чего внутри піезометра оставалось только барометрическое давленіе, давленіе-же насоса передавалось внѣшней его поверхности. Наконецъ, вмѣсто того чтобы измѣрять отдѣльно перемѣщеніе уровня θ подъ вліяніемъ одного внутренняго давленія, я продѣлывалъ полный опытъ по Jamin'y, изъ котораго узнавалъ не только θ, но и γ—перемѣщеніе жидкости въ поправочной трубкѣ; для этого металлическое соединеніе между винтомъ G и насосомъ удалялось, а между винтомъ f и насосомъ возстанавливалось; поправочная трубка ставилась на свое мѣсто G, а свободное отверстіе металлической трубки запиралось мѣдною пробкою. Всѣ эти

манипуляціи совершались легко и быстро, благодаря хорошему устройству всѣхъ соединеній; въ нихъ не было ни одного крана, и они всѣ состояли только изъ винтовъ, гаекъ и металлическихъ пробокъ. Давленіе держалось очень хорошо въ теченіи времени необходимаго для измѣренія.

Такъ какъ при измѣреніи сжимаемости жидкостей по способу Regnault, основанному на теоретическихъ формулахъ Lamé, нужны размѣры піезометровъ, то я занялся тщательнымъ опредѣленіемъ ихъ постоянныхъ. Однимъ изъ болѣе тонкихъ измѣреній слѣдуетъ считать опредѣленіе радіусовъ R_1 и R_0—внѣшняго и внутренняго—цилиндрической части піезометровъ. Съ цѣлью достигнуть желаемой точности, я запасся отрѣзками отъ обоихъ концовъ каждой трубы, послужившей впослѣдствіи для приготовленія піезометра, и приготовилъ изъ нихъ кольца, которыя затѣмъ изслѣдовалъ по четыремъ діаметрамъ, черезъ каждые 45°; вслѣдствіе этого для радіусовъ R_1 и R_0 каждаго кольца получалось по 16 промѣровъ, а въ каждомъ піезометрѣ R_1 и R_0 окончательно опредѣлялись изъ 32 измѣреній, которыя производились на горизонтальномъ компараторѣ съ ноніусомъ, раздѣленнымъ до 0.02 m.m. Въ слѣдующей таблицѣ приведены размѣры R_1 и R_0 всѣхъ четырехъ піезометровъ.

Таблица IX постоянныхъ R_1 и R_0 піезометровъ.

№№ и родъ стекла.	R_1	R_0	e
	m.m.	m.m.	m.m.
I } Greiner & C^ie in Stützerbach....	10.221	8.808	1.413
II } bei Ilmenan in Thüringen......	9.316	7.254	2.062
III } E. Gundelach, Gehlberg.......	10.156	7.722	2.434
IV } bei Elgersburg in Thüringen....	9.288	6.413	2.875

Кромѣ этой таблицы, въ которой представлены лишь среднія, интересно привести числа, которыя показали-бы, насколько радіусы R_1 и R_0 постоянны вдоль цилиндрической

части піезометра. Назовемъ черезъ a и b верхній и нижній концы піезометрической трубы и составимъ слѣдующую таблицу:

Таблица X. Измѣненія радіусовъ R_1 и R_0 по оси трубы.

№№	R_1a	R_1b	ΔR_1	R_0a	R_0b	ΔR_0
	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.
I	10.221	10.275	—0.054	8.808	8.820	—0.012
II	9.235	9.397	—0.162	7.177	7.330	—0.153
III	10.017	10.295	—0.278	7.615	7.830	—0.215
IV	9.431	9.145	0.286	6.452	6.372	0.080

Эта таблица имѣетъ весьма важное значеніе въ оцѣнкѣ результатовъ дальнѣйшихъ измѣреній, потому-что колонны 3-я и 6-я показываютъ 1), что отступленіе отъ строго цилиндрической формы иногда достигаетъ 2.8% и 2), что толщина самихъ стѣнокъ не всегда одинакова; піезометры № I, № II, № III даютъ разности между колоннами 3-ей и 6-ой, какъ видно изъ приводимыхъ чиселъ, сравнительно малыя, около

Таблица XI. Измѣненіе толщины стѣнокъ e по оси трубы.

№№	ΔR_1	ΔR_0	$\Delta R_1 - \Delta R_0$	e
	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.
I	0.054	0.012	0.042	1.413
II	0.162	0.153	0.009	2.062
III	0.278	0.215	0.063	2.434
IV	0.286	0.080	0.206	2.875

2%, худшій результатъ, около 7%, представляетъ только піезометръ № IV. Съ этими отступленіями придется считаться

впослѣдствіи, такъ какъ теорія упругости предполагаетъ R_1 и R_0 и e постоянными по всей длинѣ.

7. Кромѣ только что упомянутыхъ величинъ, мы должны еще сдѣлать опредѣленія объемовъ $U_0 = \pi R_0^2 H$ цилиндрической части піезометра, $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ шаровой его части и $W_0 = U_0 + V_0$ его полнаго внутренняго объема.

Объемъ W_0 находился изъ взвѣшиванія пустаго и наполненнаго ртутью піезометра, а объемы U_0 и V_0 изъ вычисленія по размѣрамъ. Слѣдующая таблица покажетъ, въ какой степени сходятся между собою наблюденный объемъ W_0 и вычисленный $U_0 + V_0$.

Таблица XII. Объемы U_0, V_0 и W_0 піезометровъ.

№№	H	U_0	V_0	$U_0 + V_0$ выч.	W_0 наб.	Δ
	m.m.	m.m.³	m.m.³	m.m.³	m.m.³	m.m.³
I	228	55544	2861	58405	57756	+649
II	256	42295	1598	43893	43905	— 12
III	227	42508	1928	44436	44219	+217
IV	249.5	32221	1104	33325	33091	+234

Сопоставленіе 4-й и 5-й колоннъ показываетъ, что разности колеблются отъ 0.03% до 1.10%; подобныя колебанія можно считать благопріятными, потому что въ опытахъ Grassi [1]) эта разность достигаетъ иногда 5.7% (піезометръ B), вообще-же колеблется около 0.7%.

Происхожденіе ея легко объяснить, если вспомнить несовершенство цилиндрической формы стеклянныхъ трубъ и невоз-

[1]) Grassi. Loc. cit., p. 445—446.

можность сдѣлать полусферическія основанія съ радіусами какъ разъ равными R_0 и R_1.

8. Приведенныхъ данныхъ R_1, R_0, U_0, V_0, W_0 совершенно достаточно, чтобы, присоединивъ къ нимъ наблюденныя измѣненія объемовъ θ', θ'', θ и γ, рѣшить уравненія Lamé относительно абсолютной сжимаемости жидкости χ_v и кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра k.

Хотя указанныя мною значенія постоянной Poisson'a [1]) для стекла позволяютъ пользоваться упрощенными формулами Lamé, тѣмъ не менѣе однако, я предпочитаю вывести ихъ въ общемъ видѣ независимо отъ предположенія, что $\sigma = 0.25$. Съ этою цѣлью мы обратимся къ теоріи упругости Lamé [2]), у котораго находимъ необходимыя для этого случая уравненія. Мы займемся сначала розысканіемъ уравненій, выражающихъ перемѣщенія частицы цилиндрической оболочки, и предположимъ, что наша оболочка оканчивается плоскими донышками, что на нее дѣйствуютъ внутреннее и внѣшнее давленіе P_0 и P_1, и что высота ея H настолько значительна, что вліяніемъ донышекъ можно пренебречь.

Назовемъ черезъ ρ перемѣщеніе частицы, лежащей въ плоскости перпендикулярной къ оси цилиндра и отстоящей на разстояніи r отъ этой оси по направленію радіуса; Lamé доказываетъ, что перемѣщеніе ρ выразится уравненіемъ:

$$\rho = ar + \frac{b}{r}, \tag{1}$$

въ которомъ a и b суть двѣ постоянныя. Кромѣ этого перемѣщенія, возможно еще перемѣщеніе ξ по оси цилиндра H, которое опредѣляется уравненіемъ:

$$\xi = cH, \tag{2}$$

причемъ c естъ также постоянная.

[1]) См. таблицу V, стр. 62 и 63.

[2]) Lamé. Leçons sur l'élasticité des corps solides. Loc. cit., p. 189.

Если внутренній радіусъ будетъ R_0, внѣшній R_1, внутреннее давленіе P_0, внѣшнее P_1, то въ такомъ случаѣ постоянныя a, b и c связываются съ постоянными Lamé λ и μ слѣдующими уравненіями:

$$a = c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2}, \tag{3}$$

$$b = \frac{1}{2\mu} \frac{R_0^2 R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}, \tag{4}$$

такъ что по подстановкѣ ихъ значеній въ ур. (1) и ур. (2) оба перемѣщенія ρ и ξ представятся въ формѣ:

$$\rho = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} r + \frac{1}{2\mu} \frac{R_0^2 R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2} \frac{1}{r} \tag{5}$$

и

$$\xi = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} \cdot H. \tag{6}$$

При помощи этихъ выраженій легко опредѣлить измѣненія цилиндрическаго объема $U_0 = \pi R_0^2 H$, если замѣтимъ, что подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ радіусъ R_0 обращается въ $R_0 + \rho$, а высота H въ $H + \xi$; тогда новый объемъ будетъ:

$$U_0 + \Delta U_0 = \pi (R_0 + \rho)^2 (H + \xi), \tag{7}$$

а приращеніе объема, пренебрегая безконечно малыми перемѣщеніями втораго порядка,

$$\Delta U_0 = 2\pi R_0 H \rho + \pi R_0^2 \xi \tag{8}$$

и приращеніе единицы объема:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{2\rho}{R_0} + \frac{\xi}{H}. \tag{9}$$

Чтобы найти окончательный видъ этого уравненія, намъ нужно обратиться къ уравненію (5), положивъ въ немъ $r=R_0$, и къ ур. (6), тогда:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0}=\frac{3}{3\lambda+2\mu}\frac{R_0^2P_0-R_1^2P_1}{R_1^2-R_0^2}+\frac{1}{\mu}\frac{R_1^2(P_0-P_1)}{R_1^2-R_0^2}. \quad (10)$$

Опредѣлимъ теперь измѣненіе объема въ тѣхъ частныхъ случаяхъ, которые встрѣчаются при изученіи сжимаемости жидкостей въ цилиндрическихъ піезометрахъ, и обозначимъ для простоты:

$$M=\frac{R_0^2}{R_1^2-R_0^2}; \quad M+1=\frac{R_1^2}{R_1^2-R_0^2}.$$

a) Пусть $P_1=0$, тогда:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0}=P_0\left\{\frac{3M}{3\lambda+2\mu}+\frac{M+1}{\mu}\right\}, \quad (11)$$

или:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0}=P_0\left\{\frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\right\}, \quad (12)$$

или:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0}=P_0k\left\{\frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{3\mu}\right\}. \quad (13)$$

b) Пусть $P_0=0$, тогда:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0}=-P_1\left\{\frac{3(M+1)}{3\lambda+2\mu}+\frac{(M+1)}{\mu}\right\}, \quad (14)$$

или:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0}=-\frac{P_1(M+1)(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)}, \quad (15)$$

или:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = -kP_1 \frac{(M+1)(5\mu+3\lambda)}{3\mu} . \qquad (16)$$

c) Пусть $P_1 = P_0 = P$, тогда:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3}{3\lambda+2\mu} \cdot P = -kP. \qquad (17)$$

Изъ ур. (13) и ур. (16) легко получить подлинныя формулы Lamé [1]), положивъ, какъ уже неоднократно было упомянуто, $\lambda = \mu$, именно:

$$a) \quad P_1 = 0; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{(8M+5)}{3} kP_0, \qquad (13')$$

$$b) \quad P_0 = 0; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{8(M+1)}{3} kP_1, \qquad (16')$$

$$c) \quad P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3}{5\mu} P = -kP. \qquad (17')$$

9. Выведемъ еще подобныя-же выраженія для піезометра съ шарообразной оболочкою, такъ какъ наши піезометры оканчивались полусферами.

Обращаясь къ Lamé [2]), находимъ, что въ данномъ случаѣ перемѣщеніе ρ молекулы, отстоящей на разстояніи r отъ центра, вдоль радіуса, будетъ:

$$\rho = ar + \frac{b}{r^2}, \qquad (18)$$

причемъ постоянныя a и b связываются съ постоянными λ и μ слѣдующими двумя уравненіями при условіи, что R_0 есть вну-

[1]) Regnault. Loc. cit. p. 440.

[2]) Lamé. Loc cit., p. 212 etc.

тренній радіусъ, R_1—внѣшній, P_0—внутренне давленіе, P_1—внѣшнее:

$$a = \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)}, \tag{19}$$

$$b = \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu(R_1^3 - R_0^3)}. \tag{20}$$

Подставивъ въ ур. (18) вмѣсто a и b равныя имъ величины, находимъ, что перемѣщеніе:

$$\rho = \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)} r + \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu(R_1^3 - R_0^3)} \frac{1}{r^2}. \tag{21}$$

Отсюда легко вычислить измѣненіе шароваго объема $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, помня, что радіусъ R_0 подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ превращается въ $R_0 + \rho$. Новый объемъ будетъ:

$$V_0 + \Delta V_0 = \frac{4}{3}\pi (R_0 + \rho)^3, \tag{22}$$

и пренебрегая безконечно малыми 2-й и 3-й степеней, приращеніе объема—

$$\Delta V_0 = 4\pi R_0^2 \rho, \tag{23}$$

а приращеніе единицы объема—

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3\rho}{R_0}. \tag{24}$$

Такимъ образомъ, отсюда найдемъ величину $\frac{\Delta V_0}{V_0}$, если положимъ въ ур. (21) $r = R_0$, именно:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3(R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1)}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)} + \frac{3}{4\mu} \frac{R_1^3 (P_0 - P_1)}{(R_1^3 - R_0^3)}. \tag{25}$$

Примѣнимъ это уравненіе къ случаямъ подобнымъ тѣмъ, которые уже были разобраны подъ литерами *a*), *b*) и *c*) предъидущаго параграфа, причемъ для краткости опять положимъ:

$$N = \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3}, \text{ а } N+1 = \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Тогда:

$$a) \qquad P_1 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3NP_0}{3\lambda + 2\mu} + \frac{3(N+1)P_0}{4\mu}, \qquad (26)$$

или:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = 3P_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\}, \qquad (27)$$

или:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = kP_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\}. \qquad (27')$$

$$b) \quad P_0 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -3P_1(N+1) \left\{ \frac{1}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{4\mu} \right\}, \qquad (28)$$

или:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{3P_1(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)}, \qquad (29)$$

или:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{kP_1(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu}. \qquad (29')$$

$$c) \qquad P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{3}{3\lambda + 2\mu} = -kP. \qquad (30)$$

Изъ уравненій (27'), (29') и (30) легко получить под-

линныя формулы Lamé [1]) для шара, если положить $\lambda=\mu$, именно:

$$a)\qquad P_1=0;\qquad \frac{\Delta V_0}{V_0}=\frac{9N+5}{4}kP_0;\qquad (27'')$$

$$b)\qquad P_0=0;\qquad \frac{\Delta V_0}{V_0}=-\frac{9(N+1)}{4}kP_1;\qquad (29'')$$

$$c)\qquad P_1=P_0=P;\qquad \frac{\Delta V_0}{V_0}=-\frac{3P}{5\mu}=-kP.\qquad (30')$$

10. На основаніи уравненій, изложенныхъ въ двухъ предъидущихъ параграфахъ и опредѣляющихъ измѣненіе емкости піезометровъ цилиндрической и сферической формъ, можно перейти къ опредѣленію измѣненія емкости піезометровъ, имѣющихъ форму цилиндровъ съ полусферическими основаніями, но для этого необходимо сдѣлать допущеніе, что въ послѣднемъ случаѣ измѣненіе объема:

$$\Delta W_0=\Delta U_0+\Delta V_0;$$

въ такомъ случаѣ для нашихъ піезометровъ получимъ слѣдующую таблицу формулъ:

$$a)\quad P_1=0;\quad \Delta W_0=P_0U_0\left\{\frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\right\}+ \\ +3P_0V_0\left\{\frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}\right\};\qquad (31)$$

или:

$$\Delta W_0=P_0kU_0\left\{\frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{3\mu}\right\}+ \\ +P_0kV_0\left\{\frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu}\right\}.\qquad (I)$$

[1]) Regnault. Loc. cit., p. 439.

$$b)\quad P_0=0;\qquad \Delta W_0=-\left\{P_1 U_0\frac{(M+1)(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)}+\right.$$
$$\left.+3P_1V_0\frac{(N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}\right\},\qquad (32)$$

или:

$$\Delta W_0=-\left\{P_1kU_0\frac{(M+1)(5\mu+3\lambda)}{3\mu}+\right.$$
$$\left.+P_1kV_0\frac{(N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu}\right\}.\qquad (II)$$

$$c)\quad P_1=P_0=P;\ \Delta W_0=-\frac{3P}{3\lambda+2\mu}(U_0+V_0)=-kPW_0.\ (III)$$

Изъ формулъ (I), (II), (III) получаются подлинныя формулы Lamé [1]) при допущенія $\lambda=\mu$, именно:

$$a)\ P_1=0;\qquad \Delta W_0=\left\{\frac{8M+5}{3}\cdot U_0+\frac{9N+5}{4}\cdot V_0\right\}kP_0.\ (\mathrm{I}')$$

$$b)\ P_0=0;\ \Delta W_0=-\left\{\frac{8(M+1)}{3}U_0+\frac{9(N+1)}{4}V_0\right\}kP_1.\ (\mathrm{II}')$$

$$c)\ P_1=P_0=P;\qquad \Delta W_0=-kPW_0.\qquad (\mathrm{III}')$$

На основаніи послѣдней таблицы легко составить себѣ ясное понятіе о процессѣ сжимаемости жидкостей при различныхъ условіяхъ опыта. Предположимъ, что піезометръ подверженъ одновременно, какъ это и есть дѣйствительно въ методѣ Regnault, внутреннему и внѣшнему давленіямъ, т. е., что $P_1=P_0=P$, тогда мы наблюдаемъ пониженіе уровня θ'' въ піезометрѣ, которое, согласно ур. (III), должно состоять не только

---

[1]) Regnault. Loc. cit., p. 442.

изъ пониженія на сжимаемость жидкости, но и повышенія на сжимаемость стѣнокъ; назвавъ поэтому черезъ χ_a коэффиціентъ кажущейся сжимаемости (при $P_1=P_0=P$), а черезъ χ_r — коэффиціентъ истинной, находимъ, что:

$$\chi_r=\chi_a+k. \qquad \text{(IV)}$$

Опредѣленіе коэффиціента кубической сжимаемости k, совершается помощью ур. (II) или ур. (II′) и по перемѣщенію уровня θ' въ піезометрѣ, обусловленному однимъ внѣшнимъ давленіемъ P_1, такъ какъ ур. (II):

$$kP_1=\frac{\theta'}{\frac{(5\mu+3\lambda)(M+1)}{3\mu}\cdot U_0+\frac{(6\mu+3\lambda)(N+1)}{4\mu}\cdot V_0}. \qquad \text{(V)}$$

Намъ важно установить еще соотношеніе между наблюденными перемѣщеніями уровня θ', θ'' и пониженіемъ уровня θ при $P_1=0$. Очевидно, что перемѣщеніе θ заключаетъ въ себѣ не только пониженіе на истинную сжимаемость жидкости: $\theta''+kP_0W_0=\theta''+kP_0(U_0+V_0)$, но сверхъ того и упругое расширеніе сосуда, опредѣляемое ур. (I), т. е.:

$$\theta=\theta''+kP_0U_0+kP_0V_0+kP_0U_0\left\{\frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{3\mu}\right\}+$$
$$+kP_0V_0\left\{\frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu}\right\},$$

или:

$$\theta=\theta''+kP_0U_0\left\{\frac{(M+1)(5\mu+3\lambda)}{3\mu}\right\}+kP_0V_0\left\{\frac{(N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu}\right\},$$

а такъ какъ при условіи $P_1=P_0$ два послѣдніе члена лѣвой части эквивалентны перемѣщенію θ' (ур. V), то

$$\theta=\theta''+\theta'. \qquad \text{(VI)}$$

Этому соотношенію Regnault далъ названіе условнаго уравненія и помощью его провѣрялъ точность своихъ измѣреній.

12. Легко замѣтить, однако, что вмѣсто провѣрки точности наблюденій по ур. (VI) лучше воспользоваться наблюденіемъ величины θ какъ самостоятельнымъ, съ цѣлью вычислить изъ него коэффиціентъ абсолютной сжимаемости; въ такомъ случаѣ простое сравненіе перемѣщеній θ и $\theta'+\theta''$ замѣняется сравненіемъ коэффиціентовъ абсолютной сжимаемости, что несравненно нагляднѣе. Посмотримъ, какъ это можно сдѣлать. Обозначимъ черезъ θ пониженіе жидкости въ капиллярѣ піезометра подъ вліяніемъ внутренняго давленія P_0, черезъ θ_0 упругое расширеніе піезометра подъ вліяніемъ того-же давленія, а черезъ $W_0=U_0+V_0$ внутренній объемъ цилиндрическаго піезометра съ полусферическими основаніями; тогда, очевидно, коэффиціентъ абсолютной сжимаемости можно выразить уравненіемъ:

$$\chi_0 = \frac{\theta-\theta_0}{P_0 W_0}, \tag{VII}$$

въ которомъ всѣ члены правой стороны могутъ быть опредѣлены, потому что P_0 и W_0 даются изъ опыта, а θ_0 вычисляется изъ ур. (I) или изъ ур. (I'), именно:

$$\theta_0 = kP_0U_0 \left\{ \frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{3\mu} \right\} + kP_0V_0 \left\{ \frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu} \right\}, \tag{VIII}$$

или при $\lambda=\mu$:

$$\theta_0 = kP_0 \left\{ \frac{8M+5}{3} U_0 + \frac{9N+5}{4} V_0 \right\}. \tag{VIII'}$$

Это вычисленіе требуетъ, однако, чтобы коэффиціентъ кубической сжимаемости стѣнокъ k былъ заранѣе извѣстенъ; если-же этого нѣтъ въ дѣйствительности, то нужно прибѣгнуть къ извѣстному опыту Regnault. Такимъ образомъ, на условномъ уравненіи можно основать самостоятельную методу измѣренія коэффиціента абсолютной сжимаемости жидкостей, причемъ для полнаго вычисленія его необходимо:

a) подвергнуть піезометръ и заключенную въ немъ жидкость одному внутреннему давленію P_0 и измѣрить пониженіе уровня θ въ капиллярѣ;

b) подвергнуть піезометръ одному внѣшнему давленію и измѣрить повышеніе уровня θ' въ томъ-же капиллярѣ. Тогда при помощи ур. (VII) и ур. (VIII) получимъ коэффиціентъ χ_v.

Во многихъ случаяхъ употребленіе предлагаемой методы можетъ оказаться весьма полезнымъ, потому что въ ней коэффиціентъ χ_r опредѣляется изъ суммы перемѣщеній $\theta = \theta' + \theta''$, а не изъ разности $\theta'' = \theta - \theta'$, какъ у Regnault. Этимъ свойствомъ слѣдуетъ пользоваться:

1) при изученіи малосжимаемыхъ тѣлъ;

2) при изученіи зависимости между сжимаемостью тѣлъ и температурою.

При изслѣдованіи поставленнаго мною вопроса я воспользовался этою методою и получилъ рядъ чиселъ, которыя болѣе характеризуютъ точность измѣреній, чѣмъ условное уравненіе Regnault.

13. Наконецъ, мнѣ остается дать теоретическое развитіе экспериментальной методѣ Jamin'a. Мы уже знаемъ (см. § 12, гл. I-й), что Jamin называетъ коэффиціентомъ абсолютной сжимаемости разность $\theta - \gamma$, отнесенную къ единицѣ объема и единицѣ давленія, т. е.:

$$\chi_r = \frac{\theta - \gamma}{P_0 W_0} \cdot \qquad \text{(IX)}$$

Эта формула была-бы тождественна съ ур. (VII), если-бы показаніе поправочной трубы γ было эквивалентно упругому расширенію θ_0, другими словами метода Jamin'a была-бы согласна съ теоріей упругости, если-бы выполнялось условіе:

$$\gamma=\theta_0; \qquad (X)$$

всякое-же отступленіе отъ этого равенства будетъ говорить не въ пользу методы Jamin'a. Теоретическое выраженіе упругаго расширенія θ_0 намъ извѣстно изъ ур. (VIII), а потому займемся выводомъ подобнаго-же выраженія для γ и затѣмъ сравнимъ ихъ. Очевидно, что измѣненіе объема жидкости γ, показываемое поправочною трубкою, есть ничто иное, какъ разность между начальнымъ внѣшнимъ объемомъ W_1, когда внутри піезометра нѣтъ давленія, т. е. $P_0 = 0$, и конечнымъ $W_1 + \Delta W_1$, когда P_0 есть нѣкоторая величина.

Вычислимъ приращеніе объема ΔW_1 по частямъ: отдѣльно для цилиндрической части піезометра ΔU_1 и отдѣльно для сферической ΔV_1, предполагая, что

$$\Delta W_1=\Delta U_1+\Delta V_1. \qquad (33)$$

Для вычисленія величины ΔU_1 намъ нужно возвратиться къ ур. (5) и ур. (6) и положить въ ур. (5) $r=R_1$; тогда, согласно ур. (9),

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{2\rho}{R_1} + \frac{\xi}{H}, \qquad (34)$$

или послѣ замѣны ρ и ξ соотвѣтственными величинами

$$\frac{\Delta U_1}{U_1}=\frac{3}{3\lambda+2\mu}\frac{R_0^2 P_0-R_1^2 P_1}{R_1^2-R_0^2}+\frac{1}{\mu}\frac{R_0^2(P_0-P_1)}{R_1^2-R_0^2}. \qquad (35)$$

Это общее уравненіе можетъ быть упрощено, такъ какъ

опытъ происходитъ только при одномъ внутреннемъ давленіи P_0; слѣдовательно, $P_1=0$, и тогда

$$\frac{\Delta U_1}{U_1}=\left\{\frac{3}{3\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}MP_0, \tag{36}$$

или окончательно

$$\Delta U_1=\frac{MP_0U_1(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)}=\frac{MP_0U_1k(5\mu+3\lambda)}{3\mu}, \tag{37}$$

а при допущеніи $\lambda=\mu$

$$\Delta U_1=\frac{8MP_0U_1k}{3}. \tag{37'}$$

Чтобы вычислить ΔV_1 возвратимся къ ур. (21) и положимъ въ немъ $r=R_1$; тогда согласно ур. (24)

$$\frac{\Delta V_1}{V_1}=\frac{3\rho}{R_1}=\frac{3(R_0^3P_0-R_1^3P_1)}{(3\lambda+2\mu)(R_1^3-R_0^3)}+\frac{3}{4\mu}\frac{R_0^3(P_0-P_1)}{(R_1^3-R_0^3)}, \tag{38}$$

но такъ какъ въ данномъ случаѣ опять $P_1=0$, то

$$\frac{\Delta V_1}{V_1}=\left\{\frac{3}{3\lambda+2\mu}+\frac{3}{4\mu}\right\}NP_0, \tag{39}$$

или окончательно

$$\Delta V_1=\frac{3NP_0V_1(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}=\frac{NP_0V_1k(6\mu+3\lambda)}{4\mu}, \tag{40}$$

а при допущеніи $\lambda=\mu$

$$\Delta V_1=\frac{9NP_0V_1k}{4}. \tag{40'}$$

Теперь составимъ полное выраженіе

$$\gamma=\Delta W_1=\Delta U_1+\Delta V_1 \tag{41}$$

и на основаніи ур. (37) и (40), получимъ

$$\gamma = P_0 k \left\{ \frac{(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} MU_1 + \frac{(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} NV_1 \right\}. \quad (42)$$

Сравнимъ послѣднее уравненіе съ уравненіемъ (VIII)

$$\theta_0 = P_0 k \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} U_0 + \right. \left. + \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} V_0 \right\} \quad (43)$$

и возьмемъ разность

$$\gamma - \theta_0 = P_0 k \left[\frac{(U_1 - U_0) M(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} + \frac{(V_1 - V_0) N(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} - \right. \left. - (3\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{U_0}{3\mu} + \frac{V_0}{4\mu} \right\} \right], \quad (44)$$

но такъ какъ

$$(U_1 - U_0)M = U_0, \text{ а } (V_1 - V_0)N = V_0, \quad (45)$$

то

$$\gamma - \theta_0 = P_0 k \left\{ \frac{U_0(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} + \frac{V_0(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} - \right. \left. - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3\mu} U_0 - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{4\mu} V_0 \right\}, \quad (46)$$

или

$$\gamma - \theta_0 = P_0 k \left\{ \frac{U_0}{3\mu}(5\mu + 3\lambda - 3\lambda - 2\mu) + \frac{V_0}{4\mu}(6\mu + 3\lambda - 3\lambda - 2\mu) \right\}, \quad (47)$$

откуда окончательно

$$\gamma - \theta_0 = P_0 k (U_0 + V_0) = P_0 k W_0. \quad (48)$$

Если отнесемъ γ и θ_0 къ единицѣ объема и давленія, то получимъ

$$\frac{\gamma-\theta_0}{P_0 W_0}=k; \tag{49}$$

такимъ образомъ мы видимъ, что γ не равно θ_0, а слѣдовательно, предположеніе Jamin'а, что поправочная трубка точно измѣряетъ упругое расширеніе піезометра, не оправдывается теоріею упругости. Возвращаясь къ ур. (VII), мы должны сообразно только-что полученному результату написать соотношеніе

$$\chi_v=\frac{\theta-\theta_0}{P_0 W_0}=\frac{\theta-\gamma}{P_0 W_0}+k, \tag{VII}$$

которое показываетъ, что къ результату, полученному по способу Jamin'а, нужно придавать коэффиціентъ кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра. Эта поправка впервые была предложена Guillaume'омъ [1]), хотя въ нѣсколько иной формѣ.

14. Уравненіе (VII) приводитъ къ заключенію, что

$$\frac{\theta-\gamma}{P_0 W_0}=\frac{\theta''}{P_0 W_0}=\frac{\theta-\theta'}{P_0 W_0}=\chi_a \tag{50}$$

и что

$$\gamma=\theta'. \tag{51}$$

Такимъ образомъ, метода Jamin'а становится вполнѣ понятною: она эквивалентна первой фазѣ методы Regnault, когда піезометръ подверженъ одновременно внутреннему и внѣшнему сжатію, а потому даетъ не абсолютную сжимаемость χ_v, а только кажущуюся χ_a. Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что кубическая сжимаемость стѣнокъ піезометра можетъ быть опредѣлена не только по способу Regnault при одномъ внѣшнемъ давленіи на стѣнки піезометра, но также и изъ показаній γ

---

[1]) Guillaume. Comptes rendus, t. 103, 1886, p. 1183 и Archives des sciences physiques et naturelles. (2) t. 17, 1887, p. 155 и p. 177.

поправочной трубки. Равенство (51) можетъ быть доказано и непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, согласно ур. (32) стр. 90,

$$\theta' = \frac{P_1U_0(M+1)(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{3P_1V_0(N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}, \quad (52)$$

а согласно ур. (42) стр. 96,

$$\gamma = \frac{P_0U_1M(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{3P_0V_1N(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}; \quad (53)$$

положимъ въ двухъ послѣднихъ уравненіяхъ $P_1 = P_0 = P$ и возьмемъ ихъ отношеніе

$$\frac{\theta'}{\gamma} = \frac{[4PU_0(M+1)(5\mu+3\lambda)+3PV_0(N+1)(6\mu+3\lambda)]}{[4PU_1M(5\mu+3\lambda)+3PV_1N(6\mu+3\lambda)]}; \quad (54)$$

какъ легко замѣтить, оно обращается въ единицу, т. е.

$$\theta' = \gamma, \quad (51)$$

потому-что

$$U_0(M+1) = U_1M,$$

а

$$V_0(N+1) = V_1N.$$

15. Теперь мнѣ остается привести дальнѣйшіе результаты своихъ измѣреній и показать, въ какой мѣрѣ ими оправдываются эти выводы теоріи упругости. Всѣ измѣренія были произведены мною при установившемся давленіи, причемъ колонна ртути въ капиллярѣ всегда возвращалась на старое мѣсто, что указывало на отсутствіе какъ нагрѣванія отъ сжатія, такъ и постоянной деформаціи сосуда. При оперированіи по способу Regnault и по способу Jamin'а соблюдался разъ навсегда слѣдующій планъ измѣреній:

a) Опредѣливъ на скалѣ воздушнаго манометра точку въ 0.5 атмосферы давленія, т. е. въ $\frac{760}{2}$ m.m. ртутнаго столба

при 0°, какъ уже подробно было описано раньше [1]), я вычислялъ другую точку, которой соотвѣтствовало давленіе отъ 9.112 до 9.240 атмосферъ, въ зависимости отъ высоты барометра и комнатной температуры.

b) Потомъ я дѣлалъ одновременные отсчеты на капиллярѣ піезометра C, на термометрѣ Alvergniat, раздѣленномъ до 0.02 C., а также на поправочной трубкѣ γ, когда оперировалъ по методѣ Jamin'a.

c) Далѣе медленно повышалъ давленіе до вычисленной точки скалы воздушнаго манометра, давалъ время установиться этому давленію и записывалъ показанія капилляра C, термометра и поправочной трубки γ, когда оперировалъ по методѣ Jamin'a.

d) Наконецъ, медленно-же уменьшалъ давленіе и, давъ ему вновь установиться, читалъ показанія капилляра C, термометра, а также поправочной трубки γ, когда оперировалъ по методѣ Jamin'a.

e) Изъ полученныхъ такимъ образомъ перемѣщеній $\theta, \theta', \theta''$ и γ впослѣдствіи вычислялись коэффиціенты кажущейся сжимаемости χ_a, кубической k и абсолютной χ_v. Каждый изъ этихъ коэффиціентовъ опредѣленъ мною изъ нѣсколькихъ рядовъ наблюденій по сказанному плану, а каждый рядъ состоялъ изъ полныхъ десяти отсчетовъ, причемъ въ виду весьма близкаго согласія между наблюденными величинами θ, θ', θ'' и γ, полученными съ одной стороны при возрастаніи давленія отъ 0 до 9.3 атмосферъ и съ другой — при убываніи отъ 9.3 до 0 атмосферъ, — я взялъ среднее ариѳметическое изъ этихъ наблюденій.

16. Приведу для иллюстраціи протоколъ одного полнаго наблюденія:

---

[1]) Г. Де-Метцъ. Опытное изслѣдованіе. Loc. cit., §§ 49—53, а также G. De-Metz. Wied. Ann., Bd. 41, 1890, p. 667.

[illegible] г. Метода Jamin'а

[illegible] t=15.80 C.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	γ_2
[illegible]	[illegible]	[illegible]	Давленіе [illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	12.40
[illegible]	[illegible]	[illegible]	12.30
[illegible]	[illegible]	[illegible]	12.40
[illegible]	[illegible]	[illegible]	12.50
[illegible]	[illegible]	[illegible]	12.45
[illegible]	[illegible]	[illegible]	12.41

[illegible] и γ_2 [illegible] хорошо, и что [illegible] наблюденіями при [illegible] наблюденіями [illegible] что жидкіе могутъ [illegible] а не нагрѣваніе [illegible] всѣ [illegible] въ [illegible] наблю- [illegible] и [illegible] γ_1 и γ_2 [illegible]

[illegible] при- [illegible]

Таблица XIII. Совокупность результатовъ всѣхъ измѣреній при комнатной температурѣ, произведенныхъ съ піезометрами №№ I, II, III и IV.

Піезометры	1	2	3	4	5	6	7	8*)	9	10	11	12	13	14	15	16
										Regnault			Jamin		De-Metz	θ'
	T^0C	P atm.	θ' m.m. cub.	θ'' m.m. cub.	θ m.m. cub.	$\theta'+\theta''$ m.m. cub.	γ m.m. cub.	$\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\chi_a 10^7$	$k 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)$
I	16.75	9.2305	12.515	0.8240		13.3390				15.457	22.847	38.304			39.972	
	18.45	9.1619	12.270	0.7797		13.0497				14.735	22.568	37.303				
	17.65	9.2400	12.535	0.7969		13.3319				14.932	22.860	37.792				
	18.40	9.2094			13.3150		12.292	0.1883	12.480				15 692	38.452	38.658	
	18.80	9.2308			13.4043		12.442	0.1887	12.631				14.499	37.259	39.748	
	18.65	9.2267			13.4088		12.437	0.1886	12.626				14.684	37.444	39.950	0.991
II	20.45	9.1869	6.3617	0.62008		6.9818				15.366	23.615	38.981				
	20.40	9.1910	6.3512	0.61480		6.9660				15.229	23.565	38.794				
	20.30	9.1974			7.0056		6.2788	0.0739	6.3527				16.161	39.751	39.617	
	20.30	9.1974			7.0346		6.2938	0.0739	6.3677				16.508	40.098	40.213	1.000
III	20.00	9.1814	6.2140	0.5277		6.7417				12.991	24.480	37.471				
	19.60	9.1707	6.2061	0.5277		6.7338				13.008	24.477	37.485				
	18.05	9.1869			6.7087		5.9675	0.0870	6.0545				16.093	40.572	36.726	
	18.15	9.1744			6.7022		5.9425	0.0869	6.0294				16.573	41.052	36.791	1.028
IV	20.15	9.1666	3.7864	0.44725		4.2336				14.736	24.601	39.337				
	19.10	9.1666	3.7864	0.40635		4.1927				13.389	24.601	37.990				
	19.75	9.2019	3.7587	0.43406		4.1927				14.245	24.367	38.612				
	19.70	9.2019			4.2363		3.6538	0.04174	3.6955				17.770	42.271	39.507	
	19 70	9.2019			4.2524		3.6890	0.04174	3.7307				16.732	41.255	40.036	1.019

*) Въ этой колоннѣ вычислено упругое расширеніе полусферической части піезометра съ цѣлью имѣть возможность сдѣлать поправку на полусферу, вклеенную въ металлическій патронъ; чтобы получить полное упругое расширеніе піезометра, нужно къ наблюденному перемѣщенію γ придать вычисленныя величины $\gamma(^1/_2 V_0)$.

Піезометръ № I. Апрѣля 16, 1890 г. Метода Jamin'a

$P = 9.2308$ атм.; $W = 57756$ m.m.³; $t = 18.80$ C.

	θ_1	θ_2	γ_1	γ_2
	Давленіе возрастало	Давленіе убывало	Давленіе возрастало	Давленіе убывало
	50.95	50.85	12.40	12.40
	50.90	50.90	12.30	12.30
	50.80	50.70	12.30	12.40
	50.80	50.70	12.45	12.50
	50.90	50.50	12.45	12.45
Среднее	50.87	50.72	12.38	12.41

Такимъ образомъ видно, что величины θ_1 и θ_2, γ_1 и γ_2 сходятся въ отдѣльныхъ наблюденіяхъ весьма хорошо, и что разницы между перемѣщеніями θ_1 и γ_1, наблюденными при возрастаніи давленія, и перемѣщеніями θ_2 и γ_2, наблюденными при убываніи его, настолько ничтожны, что всецѣло могутъ быть приписаны только ошибкамъ наблюденій, а не нагрѣванію или охлажденію ртути, а тѣмъ болѣе—упругому послѣдѣйствію стекла. Подобно приведеннымъ рядамъ были составлены и всѣ остальные, такъ что величины θ', θ'', θ и γ опредѣлены въ каждомъ рядѣ изъ десяти весьма сходныхъ между собою наблюденій. При этомъ слѣдуетъ помнить, что въ этой таблицѣ θ_1 и θ_2 выражены въ дѣленіяхъ капилляра β, (см. стр. 77), а γ_1 и γ_2 въ дѣленіяхъ капилляра β_1, (см. стр. 77).

Ввиду сказаннаго приведеніе подробныхъ таблицъ каждаго ряда не представляетъ особаго интереса, а потому я приведу лишь среднія величины отдѣльныхъ рядовъ.

Таблица XIII. Совокупность результатовъ всѣхъ измѣренiй при комнатной температурѣ, произведенныхъ съ піезометрами №№ I, II, III и IV.

Піезометры	1	2	3	4	5	6	7	8*)	9	10	11	12	13	14	15	16
										Regnault			Jamin		De-Metz	
	T^0C	P atm.	θ' m.m. cub.	θ'' m.m. cub.	θ m.m. cub.	$\theta'+\theta''$ m.m. cub.	γ m.m. cub.	$\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\chi_a 10^7$	$k 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\frac{\theta'}{\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)}$
I	16.75	9.2305	12.515	0.8240		13.3390				15.457	22.847	38.304			39.972	
	18.45	9.1619	12.270	0.7797		13.0497				14.735	22.568	37.303				
	17.65	9.2400	12.535	0.7969		13.3319				14.932	22.860	37.792				
	18.40	9.2094			13.3150		12.292	0.1883	12.480				15.692	38.452	38.658	
	18.80	9.2308			13.4043		12.442	0.1887	12.631				14.499	37.259	39.748	
	18.65	9.2267			13.4088		12.437	0.1886	12.626				14.684	37.444	39.950	0.991
II	20.45	9.1869	6.3617	0.62008		6.9818				15.366	23.615	38.981				
	20.40	9.1910	6.3512	0.61480		6.9660				15.229	23.565	38.794				
	20.30	9.1974			7.0056		6.2788	0.0739	6.3527				16.161	39.751	39.617	
	20.30	9.1974			7.0346		6.2938	0.0739	6.3677				16.508	40.098	40.213	1.000
III	20.00	9.1814	6.2140	0.5277		6.7417				12.991	24.480	37.471				
	19.60	9.1707	6.2061	0.5277		6.7338				13.008	24.477	37.485				
	18.05	9.1869			6.7087		5.9675	0.0870	6.0545				16.093	40.572	36.726	
	18.15	9.1744			6.7022		5.9425	0.0869	6.0294				16.573	41.052	36.791	1.028
IV	20.15	9.1666	3.7864	0.44725		4.2336				14.736	24.601	39.337				
	19.10	9.1666	3.7864	0.40635		4.1927				13.389	24.601	37.990				
	19.75	9.2019	3.7587	0.43406		4.1927				14.245	24.367	38.612				
	19.70	9.2019			4.2363		3.6538	0.04174	3.6955				17.770	42.271	39.507	
	19 70	9.2019			4.2524		3.6890	0.04174	3.7307				16.732	41.255	40.036	1.019

*) Въ этой колоннѣ вычислено упругое расширенiе полусферической части піезометра съ цѣлью имѣть возможность сдѣлать поправку на полусферу, вклеенную въ металлическiй патронъ; чтобы получить полное упругое расширенiе піезометра, нужно къ наблюденному перемѣщенiю γ придать вычисленныя величины $\gamma(^1/_2 V_0)$.

Таблица XIV. Окончательные результаты, вычисленные на основаніи средникъ предъидущей таблицы.

Піезометры	1	2	3	4	5	6	7	8*)	9	10 Regnault	11 Regnault	12 Regnault	13 Jamin	14 Jamin	15 De-Metz	16 θ'
	T^0C	P atm.	θ' m.m. cub.	θ'' m.m. cub.	θ m.m. cub.	$\theta'+\theta''$ m.m. cub.	γ m.m. cub.	$\gamma(\frac{1}{3}V_0)$ m.m. cub.	$\gamma+\gamma(\frac{1}{3}V_0)$ m.m. cub.	$\chi_a 10^7$	$k 10^7$	$\chi_r 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_r 10^7$	$\chi_r 10^7$	$\gamma+\gamma(\frac{1}{3}V_0)$
I	17.62	9.2109	12.410	0.8002	13.376	13.240	12.390	0.1885	12.579	15.042	22.759	37.801	14.958	37.718	39.582	0.991
II	20.42	9.1889	6.3564	0.6174	7.0201	6.9739	6.2863	0.0739	6.360	15.298	23.590	38.898	16.335	39.924	39.909	1.000
III	19.80	9.1760	6.2100	0.5277	6.7054	6.7377	5.9550	0.0869	6.042	12.996	24.479	37.475	16.333	40.812	36.777	1.028
IV	19.66	9.1784	3.7772	0.4292	4.2444	4.2064	3.6714	0.0417	3.713	14.123	24.523	38.646	17.240	41.7·3	39.782	1.019
сред.	19.38											38.20	16.22	40.05	39.01	1.0095

Таблица XV. Совокупность всѣхъ измѣреній при температурѣ тающаго льда 0°, произведенныхъ съ піезометрами № I и № III.

Піезометры	1	2	3	4	5	6	7	8	9 Regnault	10 Regnault	11 Regnault	12 Jamin	13 Jamin	14 De-Metz
	P atm.	θ' m.m. cub.	θ'' m.m. cub.	θ m.m. cub.	$\theta'+\theta''$ m.m. cub.	γ m.m. cub.	$\gamma(\frac{1}{3}V_0)$ m.m. cub.	$\gamma+\gamma(\frac{1}{3}V_0)$ m.m. cub.	$\chi_a 10^7$	$k 10^7$	$\chi_r 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_r 10^7$	$\chi_r 10^7$
I	9.2211	12.476	0.8021		13.2781				15.046	22.797	37.843			
	9.2308			13.3423		12.3367	0.1887	12.525				15.324	38.123	
	9.2308			13.3396		12.3617	0.1887	12.550				14.799	37.598	39.09
III	9.1910	6.2119	0.4502	6.6916	6.6621	—	—	—	11.192	24.446	35.638			36.34
										среднее....	36.75	15.061	37.86	37.71

Изъ таблицы (XV-й) получаемъ при температурѣ тающаго льда по методѣ:

Regnault... $\chi_v = 0.000003675$ при 0°,

Jamin испр. $\chi_v = 0.000003786$ при 0°,

De-Metz..... $\chi_v = 0.000003771$ при 0°,

Среднее изъ чиселъ, полученныхъ по всѣмъ тремъ методамъ есть:

$$\chi_v = 0.000003737 \text{ при } 0^\circ.$$

Таблица-же (XIV-я) показываетъ, что коэффиціентъ абсолютной сжимаемости ртути при 19.38° С. по методѣ:

Regnault .... $\chi_v = 0.00000382$

Jamin испр......... $\chi_v = 0.00000400$

De-Metz .... $\chi_v = 0.00000390$

Среднее изъ чиселъ, полученныхъ по всѣмъ тремъ методамъ есть:

$$\chi_v = 0.00000391 \text{ при } 19.38^\circ \text{ C.}$$

Слѣдовательно, сжимаемость ртути возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры и коэффиціентъ этого возрастанія, разсчитанный на 1° С. есть:

$$\Delta = 0.00000000877,$$

такъ что вообще въ предѣлахъ температуръ моихъ опытовъ:

$$\chi_v = 0.00000374 + 0.00000000877\, t.$$

Послѣдній опытный результатъ можно сопоставить съ вычисленнымъ на основаніи одной формулы A. Dupré [1]), которая

---

[1]) A. Dupré. Théorie mécanique de la chaleur. Paris, 1869, p. 147 etc.

была провѣрена Amagat[1]) и оказалась согласною съ его наблюденіями. Эта формула имѣетъ слѣдующій видъ:

$$A = 10333(274 + t)\frac{\alpha}{\chi_v}, \qquad (52)$$

причемъ въ ней α есть коэффиціентъ расширенія жидкости при постоянномъ давленіи, χ_v — коэффиціентъ ея абсолютной сжимаемости, $274+t=T$—абсолютная температура. Dupré называетъ величину A притяженіемъ при соприкосновеніи — «l'attraction au contact» и считаетъ ее равною произведенію $a\Delta^2$, въ которомъ Δ есть плотность тѣла, а a — особая постоянная, зависящая отъ его химической природы. Эта формула выведена на основаніи предположенія, что внутренняя работа зависитъ только отъ одного объема. Если разсматривать одно и то-же тѣло при разныхъ температурахъ и давленіяхъ, то постоянная a остается все одна и та-же, а α, T, χ_v, Δ перемѣняются на α', T', χ'_v, Δ', и тогда можно написать уравненіе:

$$\chi'_v = \frac{T'}{T}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\frac{\Delta^2}{\Delta'^2}\cdot\chi_v, \qquad (53)$$

помощью котораго легко найти коэффиціентъ сжимаемости χ'_v при температурѣ t', если онъ извѣстенъ при другой температурѣ t, и если, кромѣ того, извѣстны величины α, α', Δ и Δ'.

Сдѣлавъ этотъ разсчетъ для $t = 19.38^0$ C. и принявъ χ_v=0.00000374 при 0°, я нашелъ:

$$\chi_v = 0.000000402 \text{ при } 19{,}38^0 \text{ C.},$$

число близкое къ найденному изъ опыта.

---

[1]) Amagat, Annales de chim. et de phys., (5) t. 11, 1877, p. 536.

17. Интересно сопоставить полученное мною число съ числами другихъ изслѣдователей:

Таблица XVI коэффиціентовъ сжимаемости ртути по различнымъ изслѣдованіямъ.

Имена	χ_0
Colladon et Sturm......	0.00000352 при 0°
Aimé................	0.00000390 » »
Regnault.............	0.00000352 » »
Amaury et Descamps испр.	0.00000386 » »
Tait...	0.00000360 » »
Amagat	0.00000390 » »
De-Metz..............	0.00000374 » »
Среднее......	0.00000379 при 0°

Мы видимъ, такимъ образомъ, что наблюденныя съ давнихъ поръ числа можно легко и довольно близко согласовать между собою, если держаться теоріи упругости и принимать во вниманіе соотношеніе между коэффиціентами Lamé λ и μ, установленное для стекла многочисленными и разнообразными опытами. Всѣ коэффиціенты, представленные въ послѣднихъ трехъ таблицахъ вычислены по упрощеннымъ формуламъ Lamé при допущеніи $\lambda=\mu$. Это допущеніе мы постараемся впослѣдствіи оправдать прямыми опытами, независимо отъ результатовъ таблицы V.

18. Переходя къ сравненію чиселъ, добытыхъ различными методами, мы остановимся на сравненіи чиселъ, полученныхъ нами по методѣ Jamin'а и по методѣ Regnault.

Піезометръ	По методѣ Jamin'a	По методѣ Regnault
№ I	χ_a=0.000001496	χ_v=0.000003780
№ II	0.000001633	0.000003889
№ III	0.000001633	0.000003747
№ IV	0.000001724	0.000003865
	Среднее 0.000001622	Среднее 0.000003820.

Сопоставленіе какъ отдѣльныхъ чиселъ по нумерамъ піезометровъ, такъ и среднихъ, исключаетъ одну изъ методъ, потому-что двухъ отвѣтовъ на поставленный въ нашей задачѣ вопросъ не можетъ быть; вспоминая требованія теоріи упругости, мы должны отказаться отъ методы Jamin'a, которая приводитъ къ числамъ, противорѣчащимъ не только тѣмъ, которыя добыты на основаніи этой теоріи, но также и тѣмъ, которыя найдены путемъ одного опыта (Tait, Amagat), безъ всякаго вмѣшательства теоріи; чтобы перейти отъ числа, полученнаго по методѣ Jamin'a, къ числу, полученному по методѣ Regnault, нужно придать коэффиціентъ кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра k, тогда:

Имена	χ_v
по Jamin'y...	0.00000400
по Regnault.	0.00000382

Хотя послѣдніе два коэффиціента абсолютно и не совпадаютъ, однако, они очень близки другъ къ другу, въ особенности если принять во вниманіе, что они получены:

1) различными методами;

2) что дѣло идетъ о сжимаемости ртути, одной изъ наименѣе сжимаемыхъ жидкостей;

и 3) что піезометры сдѣланы изъ стекла, геометрическая форма котораго далеко не отвѣчаетъ требованіямъ теоріи, какъ видно изъ таблицъ X-й и XI-й.

Для полноты представленій необходимо еще сравнить столбцы 10 и 13 таб. XIV-й.

Піезометры	По методѣ Jamin'a	По методѣ Regnault
№ I	χ_a=0.00000150	χ_a=0.00000150
№ II	0.00000163	0.00000153
№ III	0.00000163	0.00000130
№ IV	0.00000172	0.00000141
	Среднее 0.00000162	Среднее 0.00000144

Объ этихъ двухъ коэффиціентахъ можно сказать то-же, что уже было сказано о коэффиціентахъ χ_v, т. е., что они настолько близки между собою, насколько могутъ быть два числа, данныя двумя различными методами при измѣреніи малаго эффекта.

Что мы дѣйствительно стоимъ на правильной точкѣ зрѣнія, подтверждается еще двумя рядами чиселъ—15 и 16 колоннъ той-же таблицы. Въ колоннѣ 15-й мною приведены абсолютные коэффиціенты сжимаемости χ_r, вычисленные по ур. (VII и VIII').

Піезометръ	De-Metz
№ I	χ_v=0.00000396
№ II	0.00000399
№ III	0.00000368
№ IV	0.00000398
	Среднее 0.00000390

Они еще разъ приводятъ къ прежнимъ числамъ и случайно представляютъ собою среднія изъ чиселъ, полученныхъ по методѣ Regnault и по исправленной методѣ Jamin'a. Наконецъ, колонна 16-я содержитъ въ себѣ отношеніе $\frac{\theta'}{\gamma+\gamma(^1/_2 V_0)}$, которое, согласно теоріи упругости, должно равняться единицѣ (урав. 51). Опытъ вполнѣ подтверждаетъ этотъ выводъ теоріи, потому-что въ среднемъ разница между опытной и теоретической величиной въ среднемъ едва достигаетъ одного процента.

Піезометръ	$\frac{\theta'}{\gamma+\gamma(^1/_2 V_0)}$
№ I	0.991
№ II	1.000
№ III	1.028
№ IV	1.019

Среднее 1.0095

19. Во всѣхъ предъидущихъ разсчетахъ я руководился упрощенными формулами, допуститвъ равенство

$$\lambda=\mu.$$

Хотя я старался оправдать такое упрощеніе рядомъ чиселъ, собранныхъ мною въ таблицѣ V, стр. 62—63 подъ № 1, тѣмъ не менѣе однако, для строгости полученнаго результата я считалъ необходимымъ еще непосредственно провѣрить это равенство. Съ этою цѣлью я остановился на методѣ, которая считается одною изъ лучшихъ при опредѣленіи модулей упругости E, μ и постоянной Poisson'a σ—на методѣ гнутія и крученія. Самая метода настолько общеизвѣстна, что излагать ее

нѣтъ особаго интереса, и поэтому я опишу лишь свой приборъ.

20. Мой приборъ состоялъ изъ чугунной скамьи (фиг. 4) длиною въ 105 cm., стоявшей на четырехъ уравнительныхъ винтахъ *VV*. Верхняя часть имѣла по всей длинѣ прорѣзъ, по которому можно было перемѣщать чугунныя части *b*, *b* и *c* и по желанію закрѣплять въ томъ или иномъ мѣстѣ помощью нажимныхъ винтовъ *d* (фиг. 5). Часть *b*, подробно представлена на фиг. 4-й и 5-й и состоитъ изъ толстаго угольника *bb*, притянутаго винтомъ *d* къ верхней части скамейки, а къ нему привинчена винтомъ *h* болѣе тонкая желѣзная пластинка *e*, которая можетъ перемѣщаться вверхъ и внизъ по оси (фиг. 7) *y*, и взадъ и впередъ по оси *z*. Пластинка *e* оканчивается призматическимъ ножемъ, на которомъ лежитъ испытуемая труба, или стержень. Часть *c*, вылитая изъ чугуна, имѣетъ сквозное отверстіе, въ которое плотно входитъ латунный патронъ, окачивающійся нажимнымъ винтомъ. Весь приборъ сдѣланъ весьма солидно, такъ что во время наблюденій не замѣчалось никакого перемѣщенія отдѣльныхъ его частей.

21. Чтобы опредѣлить модуль Юнга *E*, стеклянная трубка устанавливалась горизонтально на двухъ подставкахъ *b*,*b*; на нее надѣвались два тонкихъ латунныхъ кольца *m*, *m* и призма *p* съ чашкою *q* для разновѣсокъ (фиг. 4), а на кольцахъ помѣщались два зеркала *r*, *r'* съ тремя уравнительными винтами каждое и притомъ такъ, что ихъ ось вращенія встрѣчала подъ прямымъ угломъ центральную ось трубы.

Далѣе вмѣсто латуннаго патрона въ плоскости *yz* (фиг. 7) утверждалась скала *s* (фиг. 6) раздѣленная черезъ каждые два m. m. дѣлительною машиною Perreaux; въ этой же плоскости устанавливались и оба зеркала, такъ что лучъ, шедшій отъ скалы *s*, попадалъ на зеркало *r'*, отражался отъ него, падалъ на зеркало *r* и, вновь отразившись, попадалъ наконецъ въ зрительную трубку. Этотъ способъ опредѣленія угла гнутія я заимство-

валъ у Koenig'а [1]), и онъ оказался очень удобнымъ; я только избѣгнулъ слишкомъ большаго удаленія скалы отъ перваго зеркала, потому-что огромныя удаленія вовсе не дѣлаютъ измѣреній болѣе чувствительными.

Въ моихъ опытахъ скала s (фиг. 6) находилась всего на разстояніи 6—7 cm. отъ перваго зеркала r, зеркало r отъ зеркала r'— на разстояніи приблизительно 90 cm., а ножъ одной подставки отъ ножа другой приблизительно на разстояніи 85 cm.; такимъ образомъ, если назвать черезъ d видимое перемѣщеніе по скалѣ, наблюдаемое трубою, то tg угла гнутія будетъ

$$tg\varphi = \frac{d}{2(2sr' + rr')} = \frac{d}{D}. \tag{54}$$

При описанныхъ разстояніяхъ величина D колебалась отъ 5650 m.m. до 5830 m.m., а прогибаніе f, вычисленное по формулѣ $f = \frac{1}{3} l tg\varphi$, въ которой l есть разстояніе между ножами, не превышало 0.5 m.m., вслѣдствіе чего мнѣ не пришлось наблюдать явленія упругаго послѣдѣйствія. Модуль Юнга я вычислялъ по формулѣ

$$E = \frac{1}{f} \frac{l^3 . P}{12\pi(R_1^4 - R_0^4)}, \tag{55}$$

а грузы P употреблялъ въ 500 gr., 1000 gr., 1500 gr, 2000 gr., причемъ отступленіе отъ пропорціональности между наблюдаемыми величинами d и грузами P были настолько ничтожны, что ихъ скорѣе можно было приписать ошибкамъ наблюденій; вообще оцѣнка десятой доли одного дѣленія скалы была затруднительна. Каждый результатъ составленъ изъ нѣсколькихъ рядовъ, не менѣе пяти, а каждый рядъ изъ десяти

[1]) Koenig. Wied. Ann. Bd. 28, 1886, p. 108.

одновременныхъ наблюденій d для каждаго груза. Вотъ таблица полученныхъ чиселъ:

Таблица XVII размѣровъ R_1 и R_0 піезометрическихъ трубъ и модулей Юнга.

№№	R_1	%	R_0	%	e	f на 1 kgr.	E
	m. m.		m. m.		m. m.	m. m.	
I	10.407	2	8.955	2	1.452	0.467	7277
II	9.505	2	7.412	3	2.093	0.495	7300
III	10.000	5	7.660	7	2.340	0.408	6892
IV	9.097	1	6.387	1.5	2.710	0.510	7032
V	9.875	3	6.838	3	3.037	0.348	5663

Въ ней, кромѣ прогибанія f и модуля E, помѣщены еще радіусы R_1 и R_0; причемъ каждый изъ нихъ полученъ какъ среднее изъ четырехъ взаимно-перпендикулярныхъ промѣровъ колецъ, срѣзанныхъ у обоихъ концовъ каждой трубы.

Въ колоннахъ сосѣднихъ съ R_1 и R_0 выражены въ % колебанія этихъ радіусовъ при переходѣ отъ кольца одного конца къ кольцу другаго конца; эти колонны интересны въ томъ отношеніи, что онѣ характеризуютъ отступленія дѣйствительной формы трубъ отъ строгой цилиндрической.

Трубы № I, II, III и IV изъ нѣмецкаго стекла и представляютъ собою остатки тѣхъ трубъ, изъ которыхъ были приготовлены піезометры соотвѣтственныхъ нумеровъ, а труба № V— французскаго хрусталя неизвѣстной фабрики.

22. Для опредѣленія модуля твердости μ на одномъ концѣ трубы наклеивалось широкое, около 15 m.m., кольцо n (фиг. 4), въ него ввинчивался рычагъ t, въ 241 m.m., съ чашкою q для груза; а на другомъ концѣ наклеивался металлическій пат-

ронъ, который плотно входилъ въ отверстіе чугунной части *c* фиг. 4-й и крѣпко къ ней притягивался нажимнымъ винтомъ, такъ что этотъ конецъ трубы можно было считать неподвижнымъ. Вблизи кольца *n* съ рычагомъ и чашкою подставлялся одинъ изъ ножей *bb*, къ которому въ этомъ случаѣ привинчивались два валика *aa* (фиг. 5), вслѣдствіе чего свободный конецъ трубы прочно лежалъ на нихъ и правильно перемѣщался при крученіи. Ножъ съ валиками находился всегда очень близко къ кольцу *m* съ зеркаломъ *r'* съ цѣлью избѣгнуть выгибанія трубы подъ вліяніемъ груза, подвѣшаннаго на рычагѣ *t*. Рычагъ устанавливался перпендикулярно къ оси трубы и лежалъ въ горизонтальной плоскости; кольца *m*, *m* оставались на прежнихъ мѣстахъ, но зеркала *r* и *r'* поворачивались на 90° въ плоскость *xy*. При крученіи отсчеты угловъ θ производились по способу Poggendorff'а помощью двухъ трубъ со скалами, стоявшихъ на разстояніи 1 m. отъ зеркалъ. Въ моихъ опытахъ зеркало *r'* перемѣщалось не болѣе, чѣмъ 0°. 55 на 1000 gr., а зеркало *r* перемѣщалось приблизительно на 5% этой величины. Грузы ставились на чашку, по прежнему, въ 500 gr., 1000 gr., 1500 gr., 2000 gr., и опять таки мнѣ не удалось замѣтить упругаго послѣдѣйствія.

Я полагаю, что это легко объяснить ничтожностью самой деформаціи. Чтобы избѣгнуть вредныхъ толчковъ, грузы—какъ при крученіи, такъ и при гнутіи—спускались осторожно на блокахъ, и въ зрительную трубку легко было видѣть, что крученіе и гнутіе совершались вполнѣ правильно, потому-что дѣленія скалы перемѣщались плавно и всегда возвращались на перекрестокъ нитей, когда грузъ снимался съ чашки. Для различныхъ грузовъ наблюдаемыя крученія не строго пропорціональны грузамъ, хотя крайнее отступленіе не превышаетъ 3%. Къ сожалѣнію, болѣзнь глазъ не позволила мнѣ больше остановиться на этомъ явленіи и изучить его обстоятельнѣе. Въ прилагаемой таблицѣ приведены результаты всѣхъ опытовъ, вычисленныхъ по формулѣ

$$\mu = \frac{2l.C}{\theta\pi(R_1^4 - R_0^4)}, \qquad (56)$$

въ которой C есть моментъ крученія, а остальныя величины извѣстны; кромѣ того, на основаніи зависимости (ур. 25, стр. 70) въ ней приведены значенія постоянной Poisson'а σ, которыя оправдываютъ выборъ упрощенныхъ формулъ.

Таблица XVIII модулей твердости μ и постоянныхъ Poisson'а σ.

№№	θ на 1 kgr.	μ	σ
I	0°.491	2960	0.230
II	0°.517	2930	0.245
III	0°.447	2796	0.232
IV	0°.538	2841	0.238
V	0°.383	2291	0.236

Мнѣ остается теперь вычислить на основаніи двухъ послѣднихъ таблицъ кубическую сжимаемость стѣнокъ піезометровъ; съ этою цѣлью, я воспользуюсь формулою (26, стр. 70), согласно которой получится слѣдующая таблица:

Таблица XIX кубической сжимаемости стекла піезометровъ.

№№	$k=3(1-2\sigma)/E$	по Regnault при $\lambda=\mu$	Δ
I	0.00000230	0.00000227	—0.00000003
II	0.00000216	0.00000236	+0.00000020
III	0.00000241	0.00000245	+0.00000004
IV	0.00000231	0.00000245	—0.00000014
V	0.00000289	—	—

Кромѣ того, мы можемъ вычислить кубическую сжимаемость на основаніи данныхъ θ' таб. XIV-й и σ таб. XVIII-й по формулѣ (V), для которой μ берется изъ таблицы XVIII-й, а λ вычисляется изъ извѣстнаго соотношенія (ур. 2, стр. 51).

Сдѣлавъ эти вычисленія, находимъ слѣдующую таблицу значеній кубической сжимаемости k.

Таблица XX кубической сжимаемости стекла по Regnault при $\lambda \neq \mu$ и при $\lambda = \mu$.

№№	Regnault $\lambda \neq \mu$	Regnault $\lambda = \mu$	Δ
I	0.00000241	0.00000227	—0.00000014
II	0.00000240	0.00000236	—0.00000004
III	0.00000258	0.00000245	—0.00000013
IV	0.00000253	0.00000245	—0.00000008

Послѣднія двѣ таблицы показываютъ, что опредѣленная нами кубическая сжимаемость по способу Regnault и по упрощеннымъ формуламъ Lamé разнится отъ кубической сжимаемости, опредѣленной по описаннымъ способамъ и вычисленной по строгимъ формуламъ, только на одну единицу седьмаго десятичнаго знака, а большаго согласія едва-ли можно и требовать отъ этихъ опытовъ. Для окончательнаго сужденія составимъ еще по первымъ колоннамъ таб. XIX и XX таблицу среднихъ коэффиціентовъ сжимаемости и сопоставимъ ихъ съ числами, полученными по Regnault въ предположеніи $\lambda = \mu$.

Таблица XXI кубической сжимаемости стекла при $\lambda = \mu$ и $\lambda \mp \mu$.

№№	Среднее k при $\lambda \mp \mu$	По Regnault k при $\lambda = \mu$	Δ
I	0.00000235	0.00000227	−0.00000008
II	0.00000228	0.00000236	+0.00000008
III	0.00000250	0.00000245	−0.00000005
IV	0.00000242	0.00000245	+0.00000003

Отсюда мы заключаемъ, что разности Δ получаются въ восьмомъ десятичномъ знакѣ. Воспользуемся теперь полученными числами послѣдней таблицы, чтобы составить два ряда чиселъ абсолютной сжимаемости ртути въ предположеніяхъ $\lambda = \mu$ и $\lambda \mp \mu$.

Таблица XXII абсолютной сжимаемости ртути.

№№	χ_r при $\lambda = \mu$	χ_r при $\lambda \mp \mu$
I	0.000003780	0.000003854
II	0.000003889	0.000003810
III	0.000003747	0.000003800
IV	0.000003865	0.000003832
Среднее	0.000003820	0.000003824

Мы видимъ, такимъ образомъ, совершенное согласіе обоихъ результатовъ, вслѣдствіе чего все сказанное въ § 14 (стр. 66) и § 17 (стр. 105) остается въ полной силѣ.

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Все вышеприведенное можно резюмировать слѣдующимъ образомъ:

1) Истинный коэффиціентъ сжимаемости жидкости χ_v равенъ суммѣ коэффиціентовъ кажущейся сжимаемости жидкости χ_a и кубической сжимаемости стѣнокъ k, т. е.

$$\chi_v = \chi_a + k.$$

2) Вслѣдствіе значительнаго разнообразія абсолютной величины коэффиціента k его слѣдуетъ опредѣлять всегда самостоятельно, а не принимать на вѣру.

3) Изученіе кажущейся сжимаемости χ_a можно считать достаточнымъ лишь тогда, когда данная жидкость принадлежитъ къ числу сильно сжимающихся, и когда колебаніями значеній коэффиціента k по абсолютной величинѣ можно пренебречь; предѣлъ этихъ колебаній, какъ видно изъ таблицы VII-й, заключается между 0.0000022—0.0000028.

4) Сравненіе отдѣльныхъ результатовъ, касающихся сжимаемости жидкостей, возможно лишь для коэффиціентовъ абсолютной сжимаемости χ_v, а не для коэффиціентовъ кажущейся сжимаемости χ_a.

5) Метода Jamin'а эквивалентна первой половинѣ методы Regnault, такъ что посредствомъ ея опредѣляется лишь коэффиціентъ кажущейся сжимаемости χ_a, но она заключаетъ въ

себѣ данныя $\gamma=\theta'$, помощью которыхъ легко найти по указаннымъ формуламъ (V) коэффиціентъ k.

6) Можно было думать, не опираясь на теорію упругости, что по методѣ Jamin'а получатся различные коэффиціенты χ_a въ зависимости отъ толщины стѣнокъ піезометровъ. По теоріи упругости этого не должно быть, и опытъ вполнѣ оправдываетъ этотъ выводъ.

7) Чтобы получить одинаковые коэффиціенты сжимаемости по методѣ Regnault и Jamin'а, теорія требуетъ прибавить къ числу Jamin'а коэффиціентъ кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра k, и опытъ подтверждаетъ это заключеніе.

8) Болѣе выгодно замѣнить условное уравненіе Regnault

$$\theta=\theta'+\theta''$$

тѣмъ способомъ опредѣленія χ_v коэффиціента, который указанъ мною на стр. 92, такъ какъ вмѣсто сравненія отдѣльныхъ элементовъ наблюденій, мы получаемъ сравненіе коэффиціентовъ абсолютной сжимаемости.

9) Послѣдній способъ опредѣленія коэффиціента χ_v слѣдуетъ предпочитать способу Regnault въ тѣхъ случаяхъ, когда сжимаемость тѣла ничтожна, потому что въ немъ мы имѣемъ дѣло съ суммою перемѣщеній θ, а не съ разностью θ''; онъ имѣетъ особое значеніе при разъисканіи зависимости между измѣненіемъ сжимаемости тѣла въ связи съ измѣненіемъ температуры.

10) Всѣ три способа опредѣленія коэффиціента χ_v приводятъ къ однимъ и тѣмъ же числамъ; получаемыя при этомъ разности должны быть приписаны съ одной стороны ошибкамъ наблюденій, а съ другой несовершенству формы піезометровъ.

11) Новѣйшіе опыты Amagat и мои приводятъ къ неизбѣжному заключенію, что въ изученіи явленій сжимаемости теорія упругости занимаетъ первенствующее мѣсто, и что она аетъ разъясненіе на всѣ вопросы.

Кажется непонятнымъ, какимъ образомъ методѣ Jamin'a удалось просуществовать съ 1869 года въ качествѣ строгой методы, и почему многіе новѣйшіе изслѣдователи предпочитаютъ изученіе кажущейся сжимаемости χ_a опредѣленію коэффиціента k и связаннаго съ нимъ коэффиціента χ_v.

12) Исправивъ старые опыты по сжимаемости ртути на основаніи изложенныхъ здѣсь воззрѣній, мы получаемъ числа довольно близкія между собою, поэтому мы считаемъ справедливымъ составить изъ нихъ среднее ариѳметическое, придавъ каждому числу вѣсъ пропорціональный числу піезометровъ, которыми располагалъ каждый изслѣдователь. Насколько мнѣ извѣстно, кромѣ Amagat, имѣвшаго семь піезометровъ, и меня — четыре, у остальныхъ было всего по одному, вслѣдствіе чего среднее изъ всѣхъ наблюденій, начиная отъ Colladon'a и Sturm'a до меня включительно, будетъ

$$\chi_v = 0.00000379 \text{ при } 0^{\circ}.$$

Приведеніе къ 0° сдѣлано на основаніи найденнаго мною термическаго коэффиціента

$$\Delta = 0.0000000877.$$

13) Если теперь нѣтъ сомнѣній относительно правильности экспериментальной методы, то все-таки нельзя считать вопросъ о сжимаемости жидкаго тѣла вмѣстѣ съ тѣмъ и окончательно рѣшеннымъ. Очевидно, что въ настоящее время на очередь выдвигается изученіе зависимости между сжимаемостью и давленіемъ, между сжимаемостью и температурою, на подобіе той, которая дана Tait'омъ въ формѣ ур. (23, гл. II, стр. 43), а для этого необходимо точно опредѣлить подобную-же зависимость для стѣнокъ піезометра, потому-что существующія указанія (см. § 17, гл. II) не вполнѣ согласны между собою.

14) Кромѣ того, давно извѣстенъ фактъ, что при сжатіи тѣла происходитъ его нагрѣваніе, а при его расширеніи — охлажденіе; однако, точныхъ измѣреній до сихъ поръ нѣтъ, хотя попытки дѣлались Colladon et Sturm'омъ, Regnault, Röntgen und Schneider'омъ и Drecker'омъ. Если наблюденія Drecker'a и очень интересны, все-таки они только косвенно рѣшаютъ затрагиваемый вопросъ.

15. Наконецъ, обширное поле для изученія представляетъ собою сжимаемость растворовъ какъ солей, такъ и газовъ; изслѣдованія Röntgen und Schneider'a, Schumann'a, Drecker'a, Isambert'a и нѣкоторыхъ другихъ лицъ пока составляютъ только вступленіе въ интереснѣйшую главу молекулярной физики, которая обѣщаетъ намъ раскрыть со временемъ тайну жидкаго состоянія тѣла.

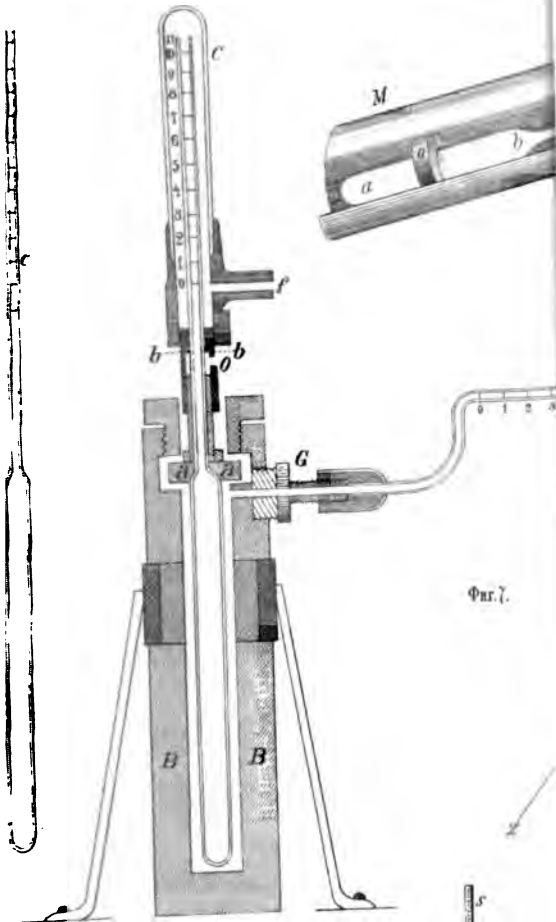
Поправки и дополненія.

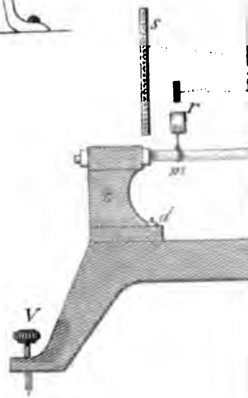
Стр.	Напечатано:	Должно быть:
16	σ=0.330 для латуни	σ=0.352 для латуни
16	σ=0.235 для стекла	σ=0.247 для стекла.
23	Кромѣ упомянутыхъ тѣлъ Cailletet изслѣдовалъ: петролеумъ, сѣрнистую кислоту.	
62	Mercadier нашелъ для стекла	σ=0.250
63	» » для стали	σ=0.330
63	Naccari e Bellati нашли для каучука.......	σ=0.310 σ=0.410

Къ статьѣ Г. Г.

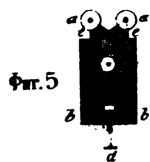
объ абсолютной сж...

Фиг. 3.





Фиг. 5



ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ XIV.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36
1892.

Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Секретарь Общества *П. Бучинскій.*

MÉMOIRES
de la section mathématique
de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie
(Odessa).

Т. XIV.

СОДЕРЖАНІЕ.

TABLE DES MATIÈRES.

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ МѢСТА

ВЪ ТЕОРІИ

ОСЕЙ ВРАЩЕНІЯ.

И. Занчевскаго.

ВЫПУСКЪ ПЕРВЫЙ.

ОДЕССА.
Типографія А. Шульце, Ланжероновская улица, домъ Карузо, № 36-й.
1891.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ «Théorie nouvelle de la rotation des corps» Poinsot указалъ на ту связь, какая имѣетъ мѣсто между элементами приведенія системы импульсивныхъ силъ къ центру инерціи и соотвѣтствующимъ движеніемъ и на то геометрическое соотвѣтствіе, какое существуетъ между осью пары и винтовой осью движенія по отношенію къ эллипсоиду инерціи. Эта геометрическая теорія импульсивныхъ силъ привела его къ синтетическому разбору движенія твердаго тѣла, подвергнутаго вначалѣ дѣйствію импульсивныхъ силъ и предоставленнаго затѣмъ самому себѣ. Вскорѣ послѣ этого появились еще мемуары того-же автора [1]), гдѣ детально разбираются нѣкоторые частные случаи дѣйствія одной импульсивной силы, именно, когда сила направлена по прямой, лежащей въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи, и когда она перпендикулярна къ послѣдней. Въ обоихъ случаяхъ результирующее движеніе есть простое вращеніе и Poinsot не только даетъ построенія, опредѣляющія положеніе оси вращенія въ зависимости отъ силы, но рѣшаетъ также рядъ другихъ вопросовъ, тѣсно съ этимъ связанныхъ. Сюда напр. относятся вопросы о положеніи центра наибольшаго удара,

---

[1]) Poinsot. Questions dynamiques. Sur la percussion des corps. Liouville, Journal. 2me Série, T. II, IV.

той точки главной плоскости инерціи, которой тѣло ударяетъ съ наибольшей силой неподвижную точку, стоящую на пути его движенія, опредѣленіе происходящаго затѣмъ движенія и т. п. Тотъ несомнѣнный интересъ, который представляютъ эти вопросы для механики, а также простота и изящество ихъ рѣшенія побудили другихъ геометровъ обобщить изслѣдованія Poinsot на случай дѣйствія системы импульсивныхъ силъ, подчиненной одному условію, чтобы вызываемое движеніе было простымъ вращеніемъ. Точки, въ которыхъ ось вращенія и центральная ось силъ пересѣкаются ихъ кратчайшимъ разстояніемъ, называются центромъ вращенія и центромъ удара. При изученіи распредѣленія осей силъ, вызывающихъ вращеніе, и осей вращенія эти точки играютъ роль въ томъ смыслѣ, что до нѣкоторой степени опредѣляютъ положеніе тѣхъ соотвѣтствующихъ осей силъ и вращенія, которыя черезъ нихъ проходятъ. Но кромѣ того центръ вращенія, въ случаѣ когда дѣйствуетъ одна импульсивная сила, имѣетъ еще и то механическое значеніе, что въ немъ одномъ достаточно укрѣпить ось вращенія, называемую въ этомъ случаѣ перманентной, чтобы она и въ дальнѣйшемъ служила осью вращенія. Chelini, который вскорѣ за Poinsot сталъ заниматься тѣмъ соотвѣтствіемъ, какое существуетъ между импульсивной силой и перманентною осью, обратилъ главное свое вниманіе на распредѣленіе въ тѣлѣ этихъ точекъ[1]). Далѣе, D. Tnrazza[2]) дѣлаетъ обобщеніе, введя вмѣсто одной импульсивной силы — систему. Въ своемъ сочиненіи о движеніи твердаго тѣла, онъ указываетъ многія свойства центровъ удара и центровъ вращеній для

---

[1]) Съ работами Chelini мы, по независящимъ отъ насъ обстоятельствамъ, успѣли ознакомиться только по изложенію ихъ другими авторами, какъ напр. Beltrami.

[2]) D. Turazza. Il moto dei systemi rigidi. Padova, 1868.

осей параллельныхъ и даетъ уравненіе той конической поверхности 3-го порядка осей вращенія, для которыхъ данная точка служитъ центромъ. Опредѣливъ съ другой стороны конусъ 2-го порядка осей перманентныхъ, проходящихъ черезъ данную точку, онъ въ пересѣченіи двухъ этихъ конусовъ находитъ тѣ перманентныя оси, для которыхъ эта точка служитъ перманентнымъ центромъ.

Оказывается, что существуютъ всегда три перманентныя оси, для которыхъ данная точка есть перманентный центръ, и что онѣ взаимно перпендикулярны. Что касается до метода изслѣдованія, то сущность его состоитъ въ слѣдующемъ. Одна изъ осей координатъ принимается параллельной оси вращенія, такъ что положеніе послѣдней опредѣляется двумя параметрами. Система силъ приводится къ равнодѣйствующей, проходящей черезъ произвольную точку, такъ что моменты пары являются функціями трехъ параметровъ. Всего-же пять параметровъ, которыми при случаѣ можно располагать по произволу. Такой методъ удобенъ до тѣхъ поръ, пока не приходится мѣнять направленія оси вращенія. Въ противномъ-же случаѣ, по справедливому замѣчанію Beltrami, вноситъ въ формулы несимметричность, чѣмъ затрудняется какъ изслѣдованіе, такъ и пониманіе результатовъ. Въ виду этого Beltrami предложилъ иной пріемъ, гдѣ оси силъ и вращенія не имѣютъ какого-либо особеннаго отношенія къ координатной системѣ, за которую взяты главныя оси инерціи, а координаты какой-либо точки на перманентной оси даются въ функціи двухъ параметровъ, и также точно представляются координаты какой-либо точки оси вращенія. Пользуясь этимъ, Beltrami легко доказываетъ [1]) основныя теоремы теоріи, заключающіяся въ томъ, что перманентныя оси,

[1]) E. Beltrami. Sulla teoria degli assi di rotazione. Collectanea in memoriam Chelini. 1881.

для которыхъ данная точка служитъ перманентнымъ центромъ, направлены по нормалямъ къ софокуснымъ эллипсоидамъ, проходящимъ черезъ эту точку, и что каждая точка пространства есть центръ удара для двухъ линій удара, направленныхъ по нормалямъ къ софокуснымъ конусамъ 2-го порядка. Далѣе Beltrami прилагаетъ свои формулы къ розысканію мѣста центровъ вращеній для осей параллельныхъ и къ другимъ подобнымъ вопросамъ. Нужно однако признать, что благодаря тому, что оси координатъ принимаются всегда одни и тѣ-же, именно главныя оси инерціи, уравненія поверхностей представляются въ формѣ очень сложной, чѣмъ, конечно, затрудняется ихъ изслѣдованіе.

Изъ всего вышеизложеннаго видно, что вниманіе изслѣдователей было обращено главнымъ образомъ на геометрическія мѣста центровъ вращеній и удара, а не на распредѣленіе самихъ осей. Причину этого, какъ кажется, слѣдуетъ искать отчасти въ механическомъ значеніи центровъ перманентныхъ, отъ которыхъ обобщеніемъ перешли къ центрамъ вращенія и удара, отчасти-же въ томъ, что центральныя оси силъ и оси вращеній не представляютъ какой-либо геометрической формы, такъ какъ любая прямая пространства можетъ быть принята за ось вращенія, и всегда можно будетъ подыскать такую центральную ось, а къ ней силу и пару, чтобы она вызвала требуемое движеніе, точно также и наоборотъ, любая прямая пространства можетъ быть принята за ось силъ; тогда легко подобрать такъ силу и пару, чтобы въ результатѣ получилось вращеніе. Нужно было сдѣлать какое-либо дополнительное условіе. Одно изъ возможныхъ условій было сдѣлано Н. Б. Делоне, который разсматривалъ [1]) импульсивныя силы, соотвѣт-

[1]) Н. Б. Делоне. Къ вопросу объ ударѣ твердыхъ тѣлъ. Двѣ статьи въ Матем. Сбор. Т. XII и XIII. Москва.

ствующія данной приведенной массѣ [1]), и оси вызываемыхъ ими винтовыхъ движеній. Этотъ интересный вопросъ, заслуживающій обстоятельнаго изслѣдованія, не даетъ однако простѣйшаго условія, которое должно лежать въ основаніи теоріи импульсивныхъ силъ, между прочимъ и потому, что какъ это не трудно доказать, даетъ только для ударовъ комплексы 2-го порядка, для осей же винтовыхъ движеній комплексы порядка 6-го. Въ этомъ отношеніи гораздо удобнѣе классификація по параметрамъ.

Извѣстно, что Ball [2]) характеризуетъ каждую систему импульсивныхъ силъ центральною осью съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ равнымъ параметру системы силъ, т. е. такъ называемымъ импульсивнымъ винтомъ; точно также каждое перемѣщеніе характеризуется осью винтоваго движенія съ нанесеннымъ на ней параметромъ, т. е. такъ называемымъ мгновеннымъ винтомъ [3]). Будемъ обозначать для краткости импульсивный винтъ параметра p, вызывающій винтъ мгновенный параметра π черезъ (C_p^π), а соотвѣтствующій винтъ мгновенный черезъ (Γ_π^p). Если положеніе (C) импульсивнаго винта дано, то тѣмъ самымъ опредѣляется однозначно тотъ параметръ p, который долженъ ему быть приписанъ, чтобы получилось движеніе (Γ_π^p) съ опредѣленнымъ параметромъ π. Если-же, наоборотъ, дается параметръ p винта (C), то его положеніе опредѣляется лишь до нѣкоторой степени, такъ что су-

---

[1]) Н. Е. Жуковскій называетъ приведенными массами массы тѣхъ двухъ сферъ, которыя ударяются съ такою-же живою силою, какъ и двѣ данныхъ тѣла. См. N. Joukovsky. Sur la percussion des corps. Liouville, Journal, 3me Série. T. IV. 1878.

[2]) R. S. Ball. The Theory of Screws. Dublin, 1876.

[3]) Параметромъ имп. винта наз. отношеніе момента пары къ силѣ и онъ равенъ нулю въ случаѣ дѣйствія одной силы. Параметръ винта мгнов. есть отношеніе поступательной слагающей винтоваго движенія къ вращательной; онъ равенъ нулю въ случаѣ простаго вращенія.

ществуетъ нѣкоторая геометрическая форма прямыхъ, которыя могутъ быть приняты за оси винтовъ (C_p^π). Если дана ось (Г) винтоваго движенія, то тѣмъ самымъ опредѣляется ея параметръ π, если желаемъ, чтобы соотвѣтствующій импульсивный винтъ имѣлъ параметръ p. Если-же, наоборотъ, дается только параметръ π, то распредѣленіе осей (Γ_π^p) подчинено извѣстному закону. Такимъ образомъ существуютъ двѣ геометрическія формы прямыхъ (Γ_π^p) и (C_p^π) такого свойства, что каждой прямой первой соотвѣтствуетъ одна прямая во второй и наоборотъ. Обѣ эти формы суть линейныя комплексы 2-го порядка. Этотъ самый общій случай допускаетъ частныя, когда-либо $p=0$, т. е. система силъ приводится къ одной силѣ, либо $\pi=0$, т. е. движеніе есть простое вращеніе, либо когда и то и другое имѣетъ мѣсто. Всего-же 4 случая: 1) (C_p^π) и (Γ_π^p), 2) (C_0^π) и (Γ_π^0), 3) (C_p^0) и (Γ_0^p), и 4) (C_0^0) и (Γ_0^0), дающихъ 8 линейныхъ комплексовъ 2-го порядка. На послѣдніе два комплекса обратимъ впервые вниманіе G. Darboux [1]), на остальные-же D. Padelletti въ своемъ мемуарѣ[2]), написанномъ по поводу статьи U. Masoni [3]), разсматривавшаго такія импульсивныя силы, которыя оказываютъ одно и то-же дѣйствіе на одну и ту-же точку нѣкотораго твердаго тѣла. D. Padelletti показалъ, что основная теорема мемуара U. Masoni, заключающаяся въ томъ, что линіи дѣйствія искомыхъ силъ представляютъ линейную кон-

---

[1]) G. Darboux. Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps. Bull. des sciences mathém. T. IV. 1880.

[2]) D. Padelletti. Sui sistemi di forze impulsive. Rendinconto dall' academia di Napoli. An. XXIII 1884, fasc. 9. Объ этомъ мемуарѣ мы узнали уже тогда, когда первая глава этой статьи была отпечатана, а потому при формулировкѣ теоремъ на стр. 6-й и 7-й не сдѣлано надлежащей ссылки.

[3]) U. Mazoni. Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un sistema rigida. Ibid. fasc. 7..

груенцію, а также и другія болѣе общія свойства, непосредственно вытекаютъ изъ того обстоятельства, что координаты (слагающія и моменты) системы импульсивныхъ силъ суть линейныя функціи отъ координатъ (слагающихъ и моментовъ) движенія. Отсюда слѣдуетъ, что всякому однородному уравненію n-ой степени между одними координатами соотвѣтствуетъ уравненіе такой-же степени между другими. При постоянномъ-же параметрѣ однородному уравненію n-ой степени между подобными координатами соотвѣтствуетъ такое-же уравненіе между координатами оси соотвѣтствующаго винта, которая слѣдовательно принадлежитъ къ комплексу n-аго порядка. Вопросъ, поставленный U. Masoni, приводитъ къ двумъ однороднымъ линейнымъ уравненіямъ между координатами движенія, а такъ какъ параметръ импульсивныхъ винтовъ у него равенъ нулю, то отсюда и вытекаетъ, что послѣдніе суть общіе лучи двухъ линейныхъ комплексовъ, т. е. составляютъ конгруенцію. Эти общія соображенія приводятъ D. Padelletti къ заключенію, что разсмотрѣнные выше комплексы (C^π_p) и (Γ^p_π) должны быть втораго порядка, ибо связь между параметромъ и слагающими и моментами представляется однородною функціей 2-ой степени послѣднихъ.

Основателемъ теоріи линейныхъ комплексовъ считается Plücker, который и изслѣдовалъ общее уравненіе комплекса 2-го порядка [1]). Но такъ какъ послѣднее содержитъ 19 независимыхъ параметровъ, то отсюда являются 58 различныхъ типовъ, смотря по тому простѣйшему виду, къ которому можетъ быть приведено его уравненіе при линейныхъ преобразованіяхъ. Съ каждой простѣйшей аналитической формой связаны геометрическія особенности, заключающіяся, напр., въ различныхъ видахъ такъ называе-

---

[1]) J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes. Leipzig, 1868.

мыхъ поверхностей особенностей комплекса, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что для ихъ точекъ конусы 2-го порядка лучей комплекса обращаются въ двѣ плоскости, а кривыя 2-го порядка, обертываемыя лучами, лежащими въ одной плоскости, для касательныхъ плоскостей къ поверхности преобразуются въ двѣ точки.

Классификація комплексовъ втораго порядка создана работами Weierstrass'a, Klein'a и Weiler'a [1]). Извѣстно, что между координатами $p_1, \ldots p_6$ прямой, выраженныхъ въ функціи координатъ двухъ точекъ, на ней лежащихъ, существуетъ тождественное соотношеніе

$$P(p_k) = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0. \qquad (a)$$

Klein доказалъ, что при линейномъ преобразованіи какой-либо однородной функціи этихъ количествъ, напр., лѣвой части уравненія комплекса 2-го порядка:

$$\Omega(p_k) = 0,$$

можно совершенно отвлечься отъ той связи, какая существуетъ между координатами p_k и координатами точекъ прямой, а разсматривать p_k какъ новыя перемѣнныя и при преобразованіи полагать:

$$p_k = \sum_i a_i p'_i,$$

но при одномъ условіи, чтобы въ новыхъ перемѣнныхъ функція P имѣла прежній видъ, и мы имѣли-бы вмѣсто уравненія (a) такое:

$$P(p'_k) = 0.$$

---

[1]) C. Weierstrass. Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen; Monatsberichte d. Berl. Acad. Mai 1868.

F. Klein. Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Gr. zwischen Linien-Coord. auf eine canon. Form. Bonn, 1868. Эта статья вновь напечатана въ XXIII томѣ Mathem. An. 1884.

A. Weiler. Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Mathem, An. Bd. VII, 1874.

Извѣстно-же, что Weierstrass указалъ способы одновременнаго приведенія двухъ квадратичныхъ формъ, какими у насъ будутъ формы Ω и P, къ каноническому виду. При такомъ преобразованіи функція P приведется или къ суммѣ однихъ только квадратовъ шести функцій, линейныхъ относительно прежнихъ перемѣнныхъ, или четное число квадратовъ можетъ отсутствовать, и въ такомъ случаѣ вмѣсто каждыхъ двухъ квадратовъ войдетъ одно удвоенное произведеніе, какъ напр., это можно видѣть на слѣд. стр.; функція-же Ω составляется изъ тѣхъ-же функцій, что и P, также можетъ иногда состоять изъ однихъ квадратовъ, но уже умноженныхъ на постоянныя, вообще-же ея видъ сложнѣе, чѣмъ видъ функціи P. Такъ какъ отъ полученнаго такимъ образомъ вида функціи P легко перейти къ тому, который требуется по Klein'у, то естественно было классифицировать комплексы по тѣмъ формамъ, къ которымъ могутъ быть приведены ихъ уравненія преобразованіями Weierstrass'а. Та-же или другая форма, къ которой такимъ путемъ проводится Ω, зависитъ отъ слѣдующаго. Уравнявъ нулю дискриминантъ пучка формъ $\Omega+\lambda P$, получимъ уравненіе 6-ой степени относительно λ. Обозначимъ черезъ λ_1 одинъ изъ его корней, напр., ν-ой кратности, и предположимъ, что всѣ миноры 1-го порядка имѣютъ тотъ-же корень, но кратности ν', всѣ миноры 2-го порядка имѣютъ его въ ν''-ой кратности и т. д. Тогда $(\lambda-\lambda_1)^{\nu-\nu'}$, $(\lambda-\lambda_1)^{\nu'-\nu''}$,.... называются элементарными дѣлителями кратностей $(\nu-\nu')$, $\nu'-\nu'')$,.....

Элементарные дѣлители характерны для даннаго комплекса: они не мѣняются при линейномъ преобразованіи его уравненія, и отъ нихъ зависитъ та каноническая форма, къ которой можетъ быть оно приведено: по нимъ поэтому и производится классификація комплексовъ 2-го порядка. Допустимъ, напр., что уравненію даннаго комплекса соотвѣтствуютъ эл. дѣлители: $(\lambda-\lambda_1)$, $(\lambda-\lambda_2)^2$, $(\lambda-\lambda_3)^3$, что

кратко обозначают такъ: (1 2 3). Тогда преобразованіе даетъ:

$$P=X_1^2+2X_2X_3+(2X_4X_6+X_5^2)=0,$$

$$\Omega=\lambda_1X_1^2+\lambda_2.2X_2X_3+\lambda_3(2X_4X_6+X_5^2)+2X_4X_5+X_2^2=0,$$

при этомъ послѣднее уравненіе можно еще упростить, соединяя его съ первымъ. Если напр. $\lambda_1=\lambda_2$, то въ символическомъ обозначеніи (1 2 3) цифры 1 и 2 заключаютъ въ скобки: ((1 2)3), и подобнымъ-же образомъ поступаютъ и въ случаѣ равенства другихъ корней. Комплексы (1 2 3), ((1 2)3), ((1 2 3)),...... суть различные виды одной и той-же канонической формы. Комплексъ самой общей формы будетъ тотъ, который символически обозначается (111111). При этомъ функція P представляется въ видѣ суммы шести квадратовъ, а функція Ω:

$$\Omega=\lambda_1X_1^2+\lambda_2X_2^2+\lambda_3X_3^2+\lambda_4X_4^2+\lambda_5X_5^2+\lambda_6X_6^2.$$

Къ такому виду приводятся комплексы импульсивныхъ винтовъ параметра p и соотвѣтствующихъ винтовъ перемѣщенія параметра π. Въ частныхъ-же случаяхъ, когда либо $p=0$, либо $\pi=0$, получается форма (2 2 2), а когда и то и другое имѣетъ мѣсто, то получаемъ форму ((11)(11)(11)), т. е. тетраэдральный комплексъ.

Поверхностями особенностей будутъ: въ общихъ случаяхъ—поверхность 4-го пор. Kummer'a, для комплексовъ (C_o^π) и (Γ_o^p)—поверхпость Steiner'a, также 4-го пор., для комплексовъ (C_p^o) и (Γ_π^o)— поверхность 3-го пор., наконецъ для остальныхъ двухъ (C_o^o) и (Γ_o^o) поверхностью особенностей служатъ главныя плоскости инерціи и плоскость безконечно удаленная.

Такъ какъ изъ послѣднихъ двухъ комплексовъ одинъ построенъ такъ точно относительно эллипсоида инерціи,

какъ другой относительно эллипсоида обратнаго, то для выясненія распредѣленія осей вращенія въ зависимости отъ распредѣленія импульсивныхъ винтовъ даннаго параметра, имъ соотвѣтствующихъ, нужно изслѣдовать кромѣ тетраэдральнаго еще комплексы (Γ^p_o) и (C^o_p).

Въ этомъ выпускѣ мы ограничиваемся изслѣдованіемъ комплексовъ тетраэдральнаго перманентныхъ осей и комплекса осей вращенія (Γ^p_o), вызываемыхъ импульсивными винтами даннаго параметра.

Въ гл. I даются общія уравненія комплексовъ (C^π_p) и (Γ^ρ_π), изслѣдуется, къ какимъ типамъ они принадлежатъ, и даются уравненія, связующія координаты импульсивнаго и мгновеннаго винтовъ. Для облегченія дальнѣйшаго изслѣдованія, въ этой главѣ всѣ уравненія преобразуются отъ осей инерціи къ новымъ осямъ, гдѣ ось Oz направлена какъ нибудь, а оси Ox и Oy лежатъ на на осяхъ сѣченія эллипсоида инерціи плоскостью перпендикулярной къ Oz.

Какъ было уже замѣчено, Plücker изслѣдовалъ общее уравненіе комплекса 2-го пор., но очевидно, что имъ не могло быть обращено вниманія на всѣ частные случаи, изъ коихъ нѣкоторые были разобраны другими геометрами. Такъ тетраэдральный комплексъ (Γ^o_o) подвергался многократному изслѣдованію, и можно указать учебникъ Reye, гдѣ различныя его свойства выведены синтетическимъ путемъ.

Не смотря на это въ гл. II этого выпуска помѣщается изслѣдованіе этого комплекса, отчасти въ виду того что различныя поверхности и кривыя комплекса, какъ онѣ описываются у Reye, кажутся намъ не вполнѣ опредѣленными, отчасти-же въ виду того, что въ теоріи осей вращенія разбираются такіе вопросы, какіе не могутъ найти себѣ мѣсто въ Geometrie der Lage. Какъ и тамъ, въ гл. II разобраны слѣдующіе случаи: распредѣленіе осей па-

раллельныхъ, лежащихъ въ одной діаметральной плоскости, проходящихъ черезъ данную точку, и лежащихъ въ какой-либо плоскости, но кромѣ того изслѣдуются каждый разъ тѣ геометрическія формы линій удара въ комплексѣ (C_0^0), которыя соотвѣтствуютъ перманентнымъ осямъ въ первой формѣ. Изслѣдованіе ведется путемъ, по преимуществу, синтетическимъ, хота затѣмъ даются уравненія встрѣчавшихся поверхностей и кривыхъ.

Комплексъ (Γ_0^p), не подвергавшійся, сколько мнѣ извѣстно, отдѣльному изслѣдованію, изслѣдуется такимъ-же порядкомъ въ гл. III аналитически, методомъ Plücker'а, при этомъ каждой его геометрической формѣ подыскивается ей соотвѣтствующая въ комплексѣ (C_p^0).

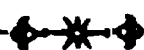
Что касается центровъ вращеній и ударовъ, то намъ казалось необходимымъ изложить методъ Beltrami по крайней мѣрѣ для случая центровъ перманентныхъ, хотя мы имъ пользуемся только для вывода общихъ теоремъ, въ болѣе-же частныхъ случаяхъ, когда результатъ можно было получить проще, онъ получался изъ тѣхъ уравненій, какія при этомъ были.

Одесса, 25-го Марта 1891 г.



Геометрическія мѣста въ теоріи осей вращенія.

И. Занчевскаго.



Des lieux géométriques dans la théorie des axes de rotation.

par I. Zantchewsky.

ГЛАВА I.

Комплексы импульсивныхъ и мгновенныхъ винтовъ.

§ 1. Мы можемъ двояко опредѣлить какую-либо прямую: или координатами двухъ ея точекъ, или координатами двухъ плоскостей, пересѣченіе которыхъ она представляетъ. Прямую, опредѣленную первымъ способомъ, называютъ лучемъ, при второмъ-же опредѣленіи—осью [1]).

Обозначимъ черезъ $(x_1 y_1 z_1)$ и (xyz) координаты двухъ точекъ M_1 и M прямой; за координаты ея можно принять проэкціи и моменты отрѣзка $M_1 M$ по отношенію къ тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ координатъ, т. е. выраженія:

$$x_0 = x - x_1, \quad y_0 = y - y_1, \quad z_0 = z - z_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$l_0 = y_1 z - z_1 y, \; m_0 = z_1 x - x_1 z, \; n_0 = x_1 y - y_1 x, \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

причемъ послѣднія три могутъ быть представлены въ видѣ:

$$l_0 = y_1 z_0 - z_1 y_0, \; m_0 = z_1 x_0 - x_1 z_0, \; n_0 = x_1 y_0 - y_1 x_0 \ldots\ldots \quad (3)$$

---

[1]) Объ изложенномъ въ этомъ § см. болѣе подробно у Plücker'а «Neue Geometrie des Raumes». Leipzig. 1868. p. 1—17., а также въ моей «Теоріи винтовъ». Одесса, 1889 г. стр. 1—6.

Уравненія прямой представляются однородными функціями этихъ количествъ и за нихъ могутъ быть приняты любыя два изъ слѣдующихъ:

$$\left.\begin{aligned} yz_0&=zy_0+l_0,\\ zx_0&=xz_0+m_0,\\ xy_0&=yx_0+n_0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

такъ что отношенія пяти изъ нихъ къ шестой опредѣляютъ прямую; кромѣ того между ними существуетъ тождественное соотношеніе:

$$l_0x_0+m_0y_0+n_0z_0=0, \tag{5}$$

такъ что независимыхъ перемѣнныхъ, согласно числу параметровъ въ уравненіяхъ прямой, четыре. Въ силу этихъ соображеній мы вправѣ положить:

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1, \tag{6}$$

т. е. что длина отрѣзка M_1M равна единицѣ.

Обозначимъ черезъ $(t_1u_1v_1)$ и (tuv) координаты двухъ плоскостей, проходящихъ черезъ нашу прямую [1]), и составимъ изъ нихъ выраженія, аналогичныя предыдущимъ:

$$t_0=t-t_1,\qquad u_0=u-v_1,\qquad v_0=v-v_1, \tag{7}$$

$$p_0=u_1v-v_1u,\quad q_0=v_1t-t_1v,\quad r_0=t_1u-u_1t, \tag{8}$$

такъ что будемъ имѣть, какъ прежде:

$$p_0=u_1v_0-v_1u_0,\quad q_0=v_1t_0-t_1v_0,\quad r_0=t_1u_0-u_1t_0, \tag{9}$$
$$p_0t_0+q_0u_0+r_0v_0=0.$$

Эти выраженія могутъ быть также приняты за координаты прямой, причемъ независимыхъ перемѣнныхъ опять четыре.

---

[1]) Подъ координатами плоскости подразумѣваютъ коэффиціенты t, u и v въ ея уравненіи, представленномъ въ видѣ:

$$tx+uy+vz+1=0.$$

Между обѣими системами координатъ существуетъ простая связь:

$$x_0:y_0:z_0:l_0:m_0:n_0=p_0:q_0:r_0:t_0:u_0:v_0, \qquad (10)$$

откуда слѣдуетъ, что въ каждомъ уравненіи, однородномъ относительно первой системы координатъ, можно сдѣлать замѣну

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ l_0,\ m_0,\ n_0$$

на

$$p_0,\ q_0,\ r_0,\ t_0,\ u_0,\ v_0$$

и обратно.

Если вмѣсто принятой системы координатныхъ осей $Oxyz$ возьмемъ другую также прямоугольную, $Ox'y'z'$, но съ тѣмъ-же началомъ, то преобразованіе координатъ $(x_0, y_0, \ldots.)$ въ новыя $(x_0', y_0', \ldots.)$ совершается такъ-же, какъ если-бы $(x_0y_0z_0)$ и $(l_0m_0n_0)$ представляли координаты точекъ. Это-же относится къ группамъ (p_0, q_0, r_0) и (t_0, u_0, v_0).

Всякому однородному уравненію n-ой степени относительно координатъ прямой соотвѣтствуетъ особое распредѣленіе прямыхъ въ пространствѣ, представляющее такъ называемый линейный комплексъ n-аго порядка.

§ 2. Каждая система импульсивныхъ силъ, дѣйствующая на твердое тѣло, характеризуется либо слагающими и моментами относительно осей $Oxyz$:

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N,$$

либо положеніемъ центральной оси (C), величиной равнодѣйствующей R и моментомъ G соотвѣтствующей пары. Отношеніе:

$$G:\ R=p \qquad (11)$$

называютъ параметромъ, прямую-же (C) съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ равнымъ p — *импульсивнымъ винтомъ*[1]), и мы можемъ сказать, что система импульсивныхъ силъ характери-

[1]) Понятіе о винтѣ было введено въ механику R. Ball'емъ. См. его «The Theorie of Screws». Dublin. 1876. § 1.

зуется импульсивнымъ винтомъ и равнодѣйствующей R. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ полагать:

$$R=1. \tag{12}$$

Обозначивъ черезъ $(x_0 y_0, \ldots)$ координаты прямой (C), будемъ имѣть [1])

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=X, & y_0=Y, & z_0=Z, \\ l_0=L-pX, & m_0=M-pY, & n_0=N-pZ, \end{array}\right\} \tag{13}$$

$$p=LX+MY+NZ, \tag{14}$$

$$X^2+Y^2+Z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2=1. \tag{15}$$

Разсматриваемой системѣ импульсивныхъ силъ соотвѣтствуетъ безконечно-малое винтовое движеніе вокругъ мгновенной оси (Г). Назовемъ черезъ $d\omega$ и $d\tau$ вращательную и поступательную слагающія этого движенія, а выраженіе:

$$\frac{d\tau}{d\omega}=\pi \tag{16}$$

параметромъ. Тогда безконечно-малое движеніе будетъ характеризоваться прямой (Г) съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ π, т. е. такъ называемымъ *мгновеннымъ винтомъ* и количествомъ вращенія $d\omega$. Разлагая же перемѣщеніе на три вращенія вокругъ осей $Oxyz$ и параллельныя этимъ осямъ поступательныя движенія, мы можемъ, предполагая оси координатъ направленными по главнымъ осямъ инерціи, представить эти слагающія въ видѣ:

$$d\omega.\Xi,\ d\omega.\mathrm{H},\ d\omega.Z,\ d\omega.\Lambda,\ d\omega.\mathrm{M},\ d\omega.\mathrm{N}, \tag{17}$$

гдѣ:

$$\Xi^2+\mathrm{H}^2+Z^2=1. \tag{18}$$

Обозначивъ черезъ a^2, b^2, c^2 главные радіусы инерціи, а черезъ M_0 массу тѣла, мы выразимъ связь между системой

---

[1]) См. «Теорію винтовъ». стр. 23.

импульсивныхъ силъ и ей соотвѣтствующимъ движеніемъ слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{array}{lll} \Xi=Q.\frac{L}{a^2}, & \mathrm{H}=Q.\frac{M}{b^2}, & \mathrm{Z}=Q.\frac{N}{c^2}, \\ \Lambda=Q.X, & \mathrm{M}=Q.Y, & \mathrm{N}=Q.Z, \end{array}\right\} \quad (19)$$

гдѣ

$$1:Q=M_0\frac{d\omega}{dt}. \quad (20)$$

Положеніе оси (Г') винтоваго движенія опредѣлится уравненіями аналогичными ур. (13) и (14), только вмѣсто X, Y,.... войдутъ Ξ, H,.... . Обозначивъ черезъ (ξ_0, η_0,....) координаты прямой (Г') и замѣнивъ Ξ, H,.... изъ ур. (19), получимъ, отбросивъ общій множитель Q:

$$\left.\begin{array}{lll} \xi_0=\frac{L}{a^2}, & \eta_0=\frac{M}{b^2}, & \zeta_0=\frac{N}{c^2}, \\ \lambda_0=X-\pi\frac{L}{a^2}, & \mu_0=Y-\pi\frac{M}{b^2}, & \nu_0=Z-\pi\frac{N}{c^2}, \end{array}\right\} \quad (21)$$

$$\pi=\frac{\frac{LX}{a^2}+\frac{MY}{b^2}+\frac{NZ}{c^2}}{\frac{L^2}{a^4}+\frac{M^2}{b^4}+\frac{N^2}{c^4}} \quad (22)$$

§ 3. Если изъ ур. (21) опредѣлимъ X, Y,...., разсматривая π какъ данное, и вставимъ ихъ значенія въ ур. (14), то получимъ:

$$p=a^2\xi_0(\lambda_0+\pi\xi_0)+b^2\eta_0(\mu_0+\pi\eta_0)+c^2\zeta_0(\nu_0+\pi\zeta_0). \quad (23)$$

Но такъ какъ вслѣдствіе ур. (15):

$$(\lambda_0+\pi\xi_0)^2+(\mu_0+\pi\eta_0)^2+(\nu_0+\pi\zeta_0)^2=1, \quad (24)$$

то, перемноживъ ур. (23) и (24), получаемъ:

$$(a^2-p\pi)\pi\xi_0^2+(b^2-p\pi)\pi\eta_0^2+(c^2-p\pi)\pi\zeta_0^2-p(\lambda_0^2+\mu_0^2+\nu_0^2)+ \\ +a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0=0. \qquad (25)$$

Опредѣленныя изъ ур. (21) значенія X, Y,.... внесемъ также въ ур. (13); тогда связь между координатами прямыхъ (C) и (Γ) и параметрами выразится уравненіями:

$$\left.\begin{array}{c} x_0=\lambda_0+\pi\xi_0,\ y_0=\mu_0+\pi\eta_0,\ z_0=\nu_0+\pi\zeta_0 \\ l_0=a^2\xi_0-p(\lambda_0+\pi\xi_0),\ m_0=b^2\eta_0-p(\mu_0+\pi\eta_0), \\ n_0=c^2\zeta_0-p(\nu_0+\pi\zeta_0). \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Ур. (23) опредѣляетъ параметръ, а ур. (26)—положеніе винта (C), если извѣстны параметръ и положеніе винта (Γ).

Если предположимъ параметры p и π постоянными, то координаты винта (Γ) связаны однородными ур. (25) второй степени и представляютъ слѣдовательно линейный комплексъ втораго порядка:

Оси винтовъ перемѣщенія даннаго параметра, соотвѣтствующія импульсивнымъ винтамъ иного даннаго параметра, представляютъ линейный комплексъ втораго порядка.

Если-же обратно опредѣлимъ X, Y,.... изъ ур. (13) и вставимъ полученныя значенія въ (22), то будемъ имѣть:

$$\pi=\frac{(l_0+px_0)\frac{x_0}{a^2}+(m_0+py_0)\frac{y_0}{b^2}+(n_0+pz_0)\frac{z_0}{c^2}}{\frac{(l_0+px_0)^2}{a^4}+\frac{(m_0+py_0)^2}{b^4}+\frac{(n_0+pz_0)^2}{c^4}} \qquad (27)$$

Это уравненіе даетъ намъ параметръ винта перемѣщенія, если извѣстны положеніе и параметръ импульсивнаго винта.

Вставивъ тѣ-же значенія въ ур. (21), получимъ для координатъ соотвѣтствующаго винта (Г):

$$\left.\begin{aligned} &\xi_0=\frac{l_0+px_0}{a^2}, \qquad \eta_0=\frac{m_0+py_0}{b^2}, \qquad \zeta_0=\frac{n_0+pz_0}{c^2}\\ &\lambda_0=x_0-\pi\frac{l_0+px_0}{a^2},\ \mu_0=y_0-\pi\frac{m_0+py_0}{b^2},\ \nu_0=z_0-\pi\frac{n_0+pz_0}{c^2} \end{aligned}\right\}(28)$$

Эти уравненія мы могли-бы получить, рѣшая относительно ξ_0, ζ_0, ... ур. (26).

Ур. (27) при данныхъ p и π даетъ такую теорему:

Импульсивные винты даннаго параметра, вызывающіе винты перемѣщенія иного даннаго параметра, представляютъ линейный комплексъ второго порядка.

Такимъ образомъ мы имѣемъ два линейныхъ комплекса винтовъ импульсивныхъ и мгновенныхъ, находящихся между собою въ такомъ отношеніи, что каждой прямой одного изъ нихъ соотвѣтствуетъ одна опредѣленная прямая другого.

Ур. (27) можно представить въ видѣ:

$$\begin{aligned} &(a^2-p\pi)\frac{p}{a^4}x_0^2+(b^2-p\pi)\frac{p}{b^4}y_0^2+(c^2-p\pi)\frac{p}{c^4}z_0^2-\\ &-\pi\left(\frac{l_0^2}{a^4}+\frac{m_0^2}{b^4}+\frac{n_0^2}{c^4}\right)+\frac{a^2-2p\pi}{a^4}l_0x_0+\frac{b^2-2p\pi}{b^4}m_0y_0+\\ &+\frac{c^2-2p\pi}{c^4}n_0z_0=0. \qquad (29) \end{aligned}$$

Обратимъ вниманіе на то, что какъ между системой координатъ $(x_0, y_0, \ldots)$, такъ и между системой $(\xi_0, \eta_0, \ldots)$ должно существовать соотношеніе вида (5). Эти соотношенія и имѣютъ мѣсто: для первой системы въ силу ур. (25), для второй—въ силу ур. (29).

При частныхъ значеніяхъ параметровъ p и π уравненія комплексовъ (25) и (29) упрощаются. Такъ, если система им-

пульсивныхъ силъ приводится къ одной силѣ, то p есть нуль, и ур. (25) и (29) принимаютъ видъ:

$$\pi(a^2\xi_0+b^2\eta_0^2+c^2\zeta_0^2)+a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0=0, \quad (25_1)$$

$$\pi\left(\frac{l_0^2}{a^4}+\frac{m_0^2}{b^4}+\frac{n_0^2}{c^4}\right)-\frac{l_0x_0}{a^2}-\frac{m_0y_0}{b^2}-\frac{n_0z_0}{c^2}=0. \quad (29_1)$$

Если мы желаемъ, чтобы система импульсивныхъ силъ параметра p вызвала одно вращеніе вокругъ оси, то должно положить π равнымъ нулю, и мы будемъ имѣть:

$$p\ (\lambda_0^2+\mu_0^2+\nu_0^2)-a^2\lambda_0\xi_0-b^2\mu_0\eta_0-c^2\nu_0\zeta_0=0, \quad (25_2)$$

$$p\ \left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)+\frac{l_0x_0}{a^2}+\frac{m_0y_0}{b^2}+\frac{n_0z_0}{c^2}=0. \quad (29_2)$$

Наконецъ, если одна импульсивная сила вызываетъ вращеніе вокругъ оси, то оба параметра p и π суть нули, и мы получаемъ уравненія:

$$a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0=0, \quad (25_3)$$

$$\frac{l_0x_0}{a^2}+\frac{m_0y_0}{b^2}+\frac{n_0z_0}{c^2}=0. \quad (29_3)$$

Замѣтимъ, что въ общемъ случаѣ, когда параметры отличны отъ нулей, всякая прямая комплекса (25) есть ось винта перемѣщенія, и всякая прямая комплекса (29) есть ось винта импульсивнаго. Во всѣхъ-же частныхъ случаяхъ, прямыя, проходящія черезъ центръ инерціи, должны подлежать отдѣльному изслѣдованію.

Такъ, въ случаѣ когда p равно нулю, импульсивная сила, проходящая черезъ центръ инерціи, вызываетъ поступательное движеніе, слѣдовательно $d\omega=0$, и слагающія перемѣщенія не могутъ быть представлены въ видѣ (17), ибо тамъ

принято, что $d\omega$ отлично отъ нуля. Въ этомъ случаѣ π не можетъ имѣть любаго значенія, а всегда безконечно велико (16); винтъ (Г), представляя направленіе поступательнаго движенія, параллеленъ силѣ.

При $\pi=0$ комплексъ (29_2) не даетъ лучей, проходящихъ черезъ центръ инерціи, между тѣмъ какъ всегда существуетъ система силъ, эквивалентная парѣ, вызывающая вращеніе вокругъ оси, проходящей черезъ эту точку. Этотъ случай исключается благодаря принятому условію (12).

Благодаря этимъ соображеніямъ, при изслѣдованіи комплексовъ мы не будемъ обращать вниманіе на лучи, выходящіе изъ центра инерціи.

§ 4. Ур. (25) и (29) имѣютъ видъ:

$$Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+Dl_0^2+Em_0^2+Fn_0^2+2Gl_0x_0+2Hm_0y_0+ \\ +2Kn_0z_0=0. \qquad (30)$$

Для того чтобы опредѣлить, къ какому типу принадлежитъ такой комплексъ, мы должны, умноживъ лѣвую часть уравненія:

$$l_0x_0+m_0y_0+n_0z_0=0$$

на множителя 2λ, придать къ лѣвой части уравненія комплекса и уравнять нулю дискриминантъ полученной такимъ образомъ квадратичной формы [1]). Уравненіе дискриминанта будетъ:

$$\begin{vmatrix} A, & 0, & 0, & G-\lambda, & 0, & 0 \\ 0, & B, & 0, & 0, & H-\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & C, & 0, & 0, & K-\lambda \\ G-\lambda, & 0, & 0, & D, & 0, & 0 \\ 0, & H-\lambda, & 0, & 0, & E, & 0 \\ 0, & 0, & K-\lambda, & 0, & 0, & F \end{vmatrix} = 0, \qquad (31)$$

---

[1]) См. A. Weiler. Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Math. An. Bd. VII. 1874. p. 145.

или, раскрывъ опредѣлитель:

$$(G-\lambda)^2(H-\lambda)^2(K-\lambda)^2+\sum BE(G-\lambda)^2(K-\lambda)^2+$$
$$+\sum BCEF(G-\lambda)^2-ABCDEF=0.$$

Лѣвая часть этого уравненія разлагается на множители:

$$\Big((G-\lambda)^2-AD\Big)\Big((H-\lambda)^2-BE\Big)\Big((K-\lambda)^2-CF\Big)=0,$$

такъ что будемъ имѣть такихъ шесть корней:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1=G+\sqrt{AD}, & \lambda_2=H+\sqrt{BE}, & \lambda_3=K+\sqrt{CF}, \\ \lambda_4=G-\sqrt{AD}, & \lambda_5=H-\sqrt{BE}, & \lambda_6=K-\sqrt{CF}.\end{matrix}\right\} \quad (32)$$

Остается разсмотрѣть, будутъ-ли эти корни обращать въ нули миноры нашего опредѣлителя. Если составить миноръ перваго порядка, выпуская изъ опредѣлителя первую горизонталь и первую вертикаль, то онъ окажется равнымъ произведенію изъ коэффиціента D на такой опредѣлитель четвертаго порядка, который обращается въ нуль при значеніяхъ λ равныхъ λ_2, λ_3, λ_5 и λ_6. Это показываетъ, что не всѣ миноры перваго порядка обращаются въ нуль при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_4$, т. е. что каждый изъ двучленовъ $(\lambda-\lambda_1)$ и $(\lambda-\lambda_4)$ есть то, что Weierstrass называетъ элементарнымъ дѣлителемъ. Такъ какъ то-же очевидно относится къ остальнымъ корнямъ, то по классификаціи Weiler'а комплексъ (30) принадлежитъ къ типу (*111111*)[1]). Особенною поверхностью комплекса служитъ поверхность Kummer'а, имѣющая 16 узловыхъ точекъ и 16 двойныхъ касательныхъ плоскостей. Къ такому типу принадлежатъ въ общемъ случаѣ комплексы (25) и (29) игновенныхъ и импульсивныхъ винтовъ.

---

[1]) Ibid. p. 154.

При $D=E=F=0$ уравненіе (31) имѣетъ три корня двойной кратности, но ни одинъ изъ нихъ не будетъ корнемъ всѣхъ миноровъ перваго порядка. Такъ напр., миноръ, получающійся черезъ выпущеніе четвертой горизонтали и четвертой вертикали, можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія изъ коэффиціента A на опредѣлитель, обращающійся въ нуль только при значеніяхъ λ равныхъ λ_2 и λ_3. Это показываетъ, что выраженіе $(\lambda-\lambda_1)^2$ есть элементарный дѣлитель. Такъ какъ то-же относится и къ выраженіямъ $(\lambda-\lambda_2)^2$ и $(\lambda-\lambda_3)^2$, то комплексъ принадлежитъ къ типу (222) [1]. Къ такому типу принадлежатъ комплексы (25_1) и (29_2).

Комплексъ имѣетъ три двойныя линіи, лежащія въ одной плоскости. Поверхностью особенностей служитъ поверхность 3-го порядка, вида:

$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+D'xyz=0.$$

Такъ какъ опредѣлитель (31) совершенно одинаково построенъ относительно коэффиціентовъ A, B, C, какъ относительно D, E, F, то мы вправѣ заключить, что при $A=B=C=0$ комплексъ приводится къ тому-же типу (222). Но такъ какъ роль этихъ коэффиціентовъ въ уравненіи комплекса иная, чѣмъ коэффиціентовъ D, E и F, то разсматриваемый комплексъ будетъ другимъ видомъ того-же типа [2]. То-же относится очевидно и къ комплексамъ (25_2) и (29_1). Комплексы эти также содержатъ три двойныя линіи, но выходящія изъ одной точки и составляющія трехгранный уголъ.

Уравненіе поверхности особенностей имѣетъ видъ:

$$A''x^2y^2+B''y^2z^2+C''x^2z^2+D''xyz=0.$$

Въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда всѣ коэффиціенты A, B, C, D, E и F равны нулю, опредѣлитель, какъ и въ

---

[1]) Ibid. p. 193.

[2]) Ibid. p. 194.

предыдущемъ случаѣ, содержитъ три двойныхъ корня, но кромѣ того всѣ миноры перваго порядка содержатъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ корней въ простой кратности, и онъ вмѣстѣ съ тѣмъ не будетъ корнемъ для миноровъ втораго порядка. Комплексъ принадлежитъ къ типу $\Big((11)(11)(11)\Big)$ [1] и есть тетраэдральный комплексъ. Къ такому типу принадлежатъ комплексы (25_3) и (29_3). Поверхностью особенностей служатъ для нихъ три координатныя плоскости и плоскость безконечно удаленная.

§ 5. Такъ какъ при изслѣдованіи комплексовъ въ слѣдующихъ главахъ намъ придется относить ихъ уравненія къ осямъ какого-либо сѣченія эллипсоида инерціи и къ нормали къ этому сѣченію, то займемся здѣсь необходимыми преобразованіями.

Пусть уравненіе эллипсоида отнесено къ центру, къ прямоугольнымъ осямъ и имѣетъ видъ

$$U=1,$$

гдѣ U однородная функція второй степени. Если провести въ эллипсоидѣ какой-нибудь радіусъ векторъ $OM=r_1$, образующіесъ осями координатъ углы, косинусы которыхъ α_1, β_1, γ_1, той какъ извѣстно, всегда будетъ существовать въ эллипсоидѣ такое сѣченіе, для котораго r_1 будетъ служить осью. Для опредѣленія этого сѣченія нужно изъ центра эллипсоида описать шаръ радіуса r_1 и найти ту кривую, по которой онъ пересѣкаетъ эллипсоидъ инерціи; затѣмъ построить конусъ, проходящій черезъ эту кривую и имѣющій вершину въ центрѣ, и провести къ нему чрезъ OM касательную плоскость; она и дастъ искомое сѣченіе [2].

Полагая $\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{r_1^2}$, будемъ имѣть для конуса уравненіе

$$U-\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2+z^2)=0.$$

---

[1]) Ibid. p. 169.

[2]) См. W. Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1879. I. Th. p. 118.

Обозначивъ затѣмъ черезъ U_1 то значеніе, которое получитъ функція U, если вмѣсто x, y и z внесемъ α_1 β_1 и γ_1, будемъ имѣть уравненіе плоскости касательной къ конусу и проходящей черезъ OM:

$$\left(\frac{dU_1}{d\alpha_1}-\lambda\alpha_1\right)x+\left(\frac{dU_1}{d\beta_1}-\lambda\beta_1\right)y+\left(\frac{dU_1}{d\gamma_1}-\lambda\gamma_1\right)z=0. \quad (33)$$

Если назовемъ r_1 первой осью этого сѣченія, то вторая ось r_2 найдется какъ пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью перпендикулярной къ первой оси, т. е. съ плоскостью

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=0. \quad (34)$$

Рѣшивъ совмѣстно оба ур. (33) и (34), найдемъ для направляющихъ косинусовъ второй оси r_2 выраженія:

$$\alpha_2=C.\begin{vmatrix}\beta_1 & \frac{du_1}{d\beta_1}\\ \gamma_1 & \frac{du_1}{d\gamma_1}\end{vmatrix},\ \beta_2=C.\begin{vmatrix}\gamma_1 & \frac{du_1}{d\gamma_1}\\ \alpha_1 & \frac{du_1}{d\alpha_1}\end{vmatrix},\ \gamma_2=C.\begin{vmatrix}\alpha_1 & \frac{du}{d\alpha_1}\\ \beta_1 & \frac{du}{d\beta_1}\end{vmatrix}, \quad (35)$$

гдѣ C — коэффиціентъ пропорціональности

Предположимъ, что вторая ось движется въ плоскости (P):

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

тогда первая описываетъ конусъ втораго порядка:

$$\alpha\left(z\frac{dU}{dy}-y\frac{dU}{dz}\right)+\beta\left(x\frac{dU}{dz}-z\frac{dU}{dx}\right)+\gamma\left(y\frac{dU}{dx}-x\frac{dU}{dy}\right)=0. \quad (36)$$

Этотъ конусъ будемъ называть конусомъ осей, соотвѣтствующимъ плоскости (P), или просто конусомъ осей. Въ частномъ случаѣ, когда эллипсоидъ отнесенъ къ осямъ, то

$$U=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1; \quad (37)$$

и если ввести обозначенія:

$$A_1=c^2-b^2,\ B_1=a^2-c^2,\ C_1=b^2-a^2, \quad (38)$$

то для конуса осей получаемъ уравненіе

$$A_1\alpha yz+B_1\beta xz+C_1\gamma xy=0. \qquad (39)$$

Пересѣченіе конуса осей съ плоскостью (P) даетъ двѣ образующія, оси сѣченія эллипсоида плоскостью (P). Обозначивъ черезъ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ направляющіе косинусы одной изъ нихъ, а черезъ X_1 — обратное значеніе квадрата длины лежащаго на ней радіуса вектора эллипсоида, будемъ имѣть для опредѣленія этихъ четырехъ величинъ уравненія:

$$A_1\alpha\beta_1\gamma_1+B_1\beta\alpha_1\gamma_1+C_1\gamma\alpha_1\beta_1=0,$$

$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0,$$

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1,$$

$$X_1=a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2.$$

Исключивъ β изъ первыхъ двухъ уравненій, получимъ:

$$\gamma_1\alpha\Big(\beta_1^2(c^2-b^2)-\alpha_1^2(a^2-c^2)\Big)+\alpha_1\gamma\Big(\beta_1^2(b^2-a^2)-\gamma_1^2(c^2-a^2)\Big)=0,$$

или

$$\gamma_1\alpha(X_1-c^2)-\alpha_1\gamma(X_1-a^2)=0,$$

такъ что

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_1}=\frac{X_1-c^2}{X_1-a^2}\,\frac{\alpha}{\gamma};$$

также получимъ

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1}=\frac{X_1-c^2}{X_1-b^2}\,\frac{\beta}{\gamma},$$

и можно положить:

$$\alpha_1=K_1\frac{\alpha}{a^2-X_1},\quad \beta_1=K_1\frac{\beta}{b^2-X_1},\quad \gamma_1=K_1\frac{\gamma}{c^2-X_1}, \qquad (40)$$

гдѣ:

$$K_1=1:\sqrt{\frac{\alpha^2}{(a^2-X_1)^2}+\frac{\beta^2}{(b^2-X_1)^2}+\frac{\gamma^2}{(c^2-X_1)^2}} \qquad (41)$$

Точно также, обозначивъ черезъ α_2, β_2, γ_2 направляющіе косинусы второй оси сѣченія эллипсоида плоскостью (P), а черезъ X_2 обратное значеніе квадрата ея длины, будемъ имѣть:

$$\alpha_2 = K_2 \frac{\alpha}{a^2 - X_2}, \quad \beta_2 = K_2 \frac{\beta}{b^2 - X_2}, \quad \gamma_2 = K_2 \frac{\gamma}{c^2 - X_2}, \qquad (40_1)$$

$$K_2 = 1 : \sqrt{\frac{\alpha^2}{(a^2 - X_2)^2} + \frac{\beta^2}{(b^2 - X_2)^2} + \frac{\gamma^2}{(c^2 - X_2)^2}}, \qquad (41_1)$$

что касается до значеній X_1 и X_2, то вслѣдствіе ур. (34) ихъ можно разсматривать какъ корни квадратнаго уравненія:

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - X} + \frac{\beta^2}{b^2 - X} + \frac{\gamma^2}{c^2 - X} = 0, \qquad (42)$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 &= (b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2, \\ X_1 X_2 &= b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Мы будемъ принимать, что

$$a^2 > b^2 > c^2, \quad X_1 > X_2 \qquad (44)$$

т. е. что черезъ X_1 названъ бо́льшій корень ур. (42).

На основаніи ур. (43) легко повѣрить формулы

$$\left.\begin{aligned} (a^2 - X_1)(a^2 - X_2) &= -B_1C_1\alpha^2, \\ (b^2 - X_1)(b^2 - X_2) &= -C_1A_1\beta^2, \\ (c^2 - X_1)(c^2 - X_2) &= -A_1B_1\gamma^2, \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

а отсюда и соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^2\alpha^2}{(a^2 - X_1)(a^2 - X_2)} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2 - X_1)(b^2 - X_2)} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2 - X_1)(c^2 - X_2)} = 0, \\ &\frac{a^2\alpha^2}{a^2 - X_1} + \frac{b^2\beta^2}{b^2 - X_1} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2 - X_1} = 1, \\ &\frac{a^2\alpha^2}{a^2 - X_2} + \frac{b^2\beta^2}{b^2 - X_2} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2 - X_2} = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

причемъ нужно имѣть въ виду нѣкоторыя изъ слѣдующихъ тождествъ:

$$\left.\begin{array}{l}\sum A_1=0, \qquad \sum A_1 a^2=0, \qquad \sum A_1(b^2+c^2)=0; \\ \sum A_1 a^2(b^2+c^2)=-\sum A_1 b^2c^2=-\sum A_1 a^4=A_1B_1C_1.\end{array}\right\} \quad (47)$$

Кромѣ того, такъ какъ X_1 и X_2 суть обратныя значенія квадратовъ радіусовъ векторовъ эллипсоида, то

$$\left.\begin{array}{l}X_1=K_1^2\left(\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-X_1)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-X_1)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-X_1)^2}\right), \\ X_2=K_2^2\left(\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-X_2)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-X_2)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-X_2)^2}\right).\end{array}\right\} \quad (48)$$

Обозначимъ:

$$\left.\begin{array}{l}(a^2-X_1)(b^2-X_1)(c^2-X_1)=M_1, \\ (a^2-X_2)(b^2-X_2)(c^2-X_2)=M_2,\end{array}\right\} \quad (49)$$

причемъ замѣтимъ, что благодаря сдѣланнымъ предположеніямъ (44), M_1 имѣетъ положительное, а M_2 отрицательное значеніе Перемножая ур. (49), получимъ

$$M_1.M_2=-A_1^2B_1^2C_1^2\alpha^2\beta^2\gamma^2. \quad (50)$$

Далѣе изъ ур. (41) и (45):

$$1:K_1^2=\sum\frac{\alpha^2}{(a^2-X_1)^2}=\sum-\frac{a^2-X_2}{B_1C_1(a^2-X_1)}=-\frac{1}{A_1B_1C_1}\sum\frac{A_1(a^2-X_2)}{a^2-X_1}=$$

$$=-\frac{1}{M_1.A_1B_1C_1}\sum A_1(a^2-X_2)(b^2-X_1)(c^2-X_1).$$

Произведя въ послѣднемъ выраженіи умноженіе и суммируя, мы будемъ получать послѣдовательно, имѣя въ виду ур. (47):

$$1:K_1^2=\frac{1}{M_1.A_1B_1C_1}\sum\left(A_1a^2(b^2+c^2)X_1+A_1b^2c^2X_2\right)=\frac{X_1-X_2}{M_1}.$$

Подобнымъ-же образомъ преобразуется и K_2^2, такъ что

$$K_1^2 = \frac{M_1}{X_1 - X_2}, \quad K_2^2 = -\frac{M_2}{X_1 - X_2}; \tag{51}$$

отсюда:

$$K_1^2 + K_2^2 = \frac{M_1 - M_2}{X_1 - X_2}. \tag{52}$$

Правую часть этого равенства легко составить, умноживъ второе изъ ур. (46) на M_1; а третье на M_2 и вычитая; тогда получимъ:

$$\sum\Big(a^2\alpha^2(b^2 - X_1)(c^2 - X_1) - a^2\alpha^2(b^2 - X_2)(c^2 - X_2)\Big) =$$

$$= (X_1 - X_2)\sum a^2\alpha^2\Big(-(b^2 + c^2) + X_1 + X_2\Big) = M_1 - M_2;$$

отсюда, имѣя въ виду первое изъ ур. (43), получимъ:

$$\frac{M_1 - M_2}{X_1 - X_2} =$$

$$= \sum a^2\alpha^2\Big(-(b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + (b^2+c^2)\alpha^2 + (c^2+a^2)\beta^2 + (a^2+b^2)\gamma^2\Big)$$

$$= \sum a^2\alpha^2(-C_1\beta^2 + B_1\gamma^2) = A_1^2\beta^2\gamma^2 + B_1^2\gamma^2\alpha^2 + C_1^2\alpha^2\beta^2.$$

Слѣдовательно:

$$K_1^2 + K_2^2 = A_1^2\beta^2\gamma^2 + B_1^2\gamma^2\alpha^2 + C_1^2\alpha^2\beta^2. \tag{53}$$

Изъ ур. (43) имѣемъ:

$$(X_1 - X_2)^2 = (X_1 + X_2)^2 - 4X_1X_2 =$$

$$= \Big((b^2+c^2)\alpha^2 + (a^2+c^2)\beta^2 + (a^2+c^2)\gamma^2\Big)^2 - 4\Big(b^2c^2\alpha^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \ldots\Big),$$

или

$$(X_1 - X_2)^2 = A_1^2\alpha^4 + B_1^2\beta^4 + C_1^2\gamma^4 - 2A_1B_1\alpha^2\beta^2 -$$

$$- 2B_1C_1\beta^2\gamma^2 - 2C_1A_1\gamma^2\alpha^2. \tag{54}$$

Замѣнимъ въ ур. (53) величины A_1^2.... имъ соотвѣтственно равными $(B_1+C_1)^2$,..... и сложимъ его съ ур. (54); тогда члены, содержащіе удвоенныя произведенія взаимно уничтожатся; члены, содержащіе A_1^2, будутъ:

$$A_1^2\alpha^4+A_1^2\alpha^2\gamma^2+A_1^2\beta^2\alpha^2=A_1^2\alpha^2;$$

такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$K_1^2+K_2^2+(X_1-X_2)^2=A_1^2\alpha^2+B_1^2\beta^2+C_1^2\gamma^2. \qquad (55)$$

§ 6. Займемся теперь преобразованіемъ функціи перемѣнныхъ (xyz) и $(x_1y_1z_1)$:

$$a^2xx_1+b^2yy_1+c^2zz_1 \qquad (56)$$

къ новымъ перемѣннымъ $(x'y'z')$ и $(x_1'y_1'z_1')$, связь которыхъ съ прежними выражается уравненіями вида:

$$x=\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha z',$$
$$y=\beta_1x'+\beta_2y'+\beta z',$$
$$z=\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma z',$$

гдѣ $(\alpha\beta\gamma)$ суть косинусы угловъ, образованныхъ съ главными осями инерціи какимъ-либо радіусомъ векторомъ, а $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ и $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$—косинусы угловъ, образованныхъ осями сѣченія эллипсоида плоскостью, перпендикулярною къ радіусу вектору, съ тѣми-же прямыми:

Сдѣлавъ подстановку, получимъ, имѣя въ виду ур. (40), (46) и (48):

$$a^2xx_1+b^2yy_1+c^2zz_1=X_1x'x_1'+X_2y'y_1'+Pz'z_1'+$$
$$+K_1(x'z_1'+z'x_1')+K_2(y'z_1'+z'y_1'), \qquad (57)$$

гдѣ:

$$P=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2 \qquad (58)$$

и означаетъ величину обратную квадрата радіуса вектора поверхности, имѣющаго $(\alpha\beta\gamma)$ своими направляющими косинусами.

Положивъ въ ур. (57): $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, получимъ лѣвую часть уравненія эллипсоида инерціи; такъ что уравненіе его будетъ:

$$X_1 x^2 + X_2 y^2 + P z^2 + 2K_1 xz + 2K_2 yz = 1. \qquad (59)$$

Преобразуемъ теперь къ новымъ осямъ уравненіе (25) комплекса мгновенныхъ винтовъ и формулы (26), связующія винтъ импульсивный съ винтомъ мгновеннымъ.

Лѣвая часть ур. (25) есть сумма четырехъ выраженій:

$$A = \pi(a^2\xi_0^2 + b^2\eta_0^2 + c^2\zeta_0^2),$$
$$B = -p\pi^2(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2),$$
$$C = -p(\lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2),$$
$$D = a^2\lambda_0\xi_0 + b^2\mu_0\eta_0 + c^2\nu_0\zeta_0.$$

Какъ координаты ξ_0, η_0, ζ_0, такъ и координаты λ_0, μ_0, ν_0 преобразуются къ новымъ осямъ по тѣмъ-же формуламъ, какъ координаты точки; поэтому при переходѣ отъ одной прямоугольной системы къ другой выраженія B и C будутъ инварьянтами; что-же касается до выраженій A и D, то первое изъ нихъ имѣетъ видъ лѣвой части уравненія эллипсоида, умноженной на π, второе-же получится изъ (56) замѣной (xyz) и $(x_1y_1z_1)$ на $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ и $(\lambda_0\mu_0\nu_0)$. Такимъ образомъ, отбросивъ значки при новыхъ координатахъ, мы можемъ такъ написать преобразованное уравненіе комплекса:

$$\pi(X_1 - p\pi)\xi_0^2 + \pi(X^2 - p\pi)\eta_0^2 + \pi(P - p\pi)\zeta_0^2 + 2\pi K_1\xi_0\zeta_0 + 2\pi K_2\eta_0\zeta_0 -$$
$$-p(\lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2) + X_1\xi_0\lambda_0 + X_2\eta_0\mu_0 + P\zeta_0\nu_0 + K_1(\xi_0\nu_0 + \zeta_0\lambda_0) +$$
$$+ K_2(\eta_0\nu_0 + \zeta_0\mu_0) = 0, \qquad (60)$$

Что касается до ур. (26), то слѣдуетъ совершить одновременно преобразованіе надъ обѣими частями равенства. Положивъ для краткости:

$$m = \lambda_0' + \pi\xi_0', \quad n = \mu_0' + \pi\eta_0', \quad q = \nu_0' + \pi\zeta_0',$$

и отбросивъ значки въ новыхъ координатахъ, будемъ имѣть:

$$(x_0-m)\alpha_1+(y_0-n)\alpha_2+(z_0-q)\alpha=0,$$
$$(x_0-m)\beta_1+(y_0-n)\beta_2+(z_0-q)\beta=0,$$
$$(x_0-m)\gamma_1+(y_0-n)\gamma_2+(z_0-q)\gamma=0,$$
$$l_0\alpha_1+m_0\alpha_2+n_0\alpha=(a^2\xi_0-pm)\alpha_1+(a^2\eta_0-pn)\alpha_2+(a^2\zeta_0-pq)\alpha.$$
$$l_0\beta_1+m_0\beta_2+n_0\beta=(b^2\xi_0-pm)\beta_1+(b^2\eta_0-pn)\beta_2+(b^2\zeta_0-pq)\beta,$$
$$l_0\gamma_1+m_0\gamma_2+n_0\gamma=(c^2\xi_0-pm)\gamma_1+(c^2\eta_0-pn)\gamma_2+(c^2\zeta_0-pq)\gamma.$$

Первыя три уравненія очевидно даютъ:

$$x_0=m,\quad y_0=n,\quad z_0=q.$$

Умноживъ-же послѣдовательно послѣднія три на $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и сложивъ, получимъ:

$$l_0=(a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2)\xi_0+(a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2)\eta_0+$$
$$+(a^2\alpha_1\alpha+b^2\beta_1\beta+c^2\gamma_1\gamma)\zeta_0-pm,$$

или, имѣя въ виду ур. (48) и (46):

$$l_0=X_1\xi_0+K_1\zeta_0-pm,$$

Точно также найдутся и новыя координаты m_0 и n_0; такъ что будемъ имѣть при новыхъ осяхъ:

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\lambda_0+\pi\xi_0, & l_0&=(X_1-p\pi)\xi_0+K_1\zeta_0-p\lambda_0,\\ y_0&=\mu_0+\pi\eta_0, & m_0&=(X_2-p\pi)\eta_0+K_2\zeta_0-p\mu_0,\\ z_0&=\nu_0+\pi\zeta_0, & n_0&=K_1\xi_0+K_2\eta_0+(P-p\pi)\zeta_0-p\nu_0. \end{aligned}\right\}\quad(61)$$

Если изъ этихъ уравненій опредѣлимъ $\xi_0, \eta_0, \ldots$, то получимъ формулы перехода отъ импульсивнаго винта къ игновенному. Уравнявъ-же нулю выраженіе $\lambda_0\xi_0+\mu_0\eta_0+\nu_0\zeta_0$, получимъ уравненіе комплекса импульсивныхъ винтовъ при новыхъ осяхъ координатъ. Мы не будемъ этого дѣлать, такъ какъ эти формулы намъ не понадобятся.

ГЛАВА II.

О перманентныхъ осяхъ и совершенныхъ ударахъ.

§ 7. Разсмотримъ сначала случай, когда система импульсивныхъ силъ приводится къ одной силѣ, или просто—когда дѣйствуетъ одна импульсивная сила, которую для краткости будемъ называть *ударомъ*. Мы будемъ разсматривать только удары, способные вызвать одно вращеніе вокругъ оси; такіе удары носятъ названіе *совершенныхъ*, а соотвѣтствующая ось вращенія—*перманентною осью*.

Перманентныя оси (Г) принадлежатъ къ комплексу:

$$a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0=0. \qquad (62)$$

Зная координаты прямой (Г), найдемъ координаты линіи дѣйствія соотвѣтствующаго совершеннаго удара по формуламъ (26), гдѣ нужно будетъ положить $p=\pi=0$:

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=\lambda_0, & y_0=\mu_0, & z_0=\nu_0, \\ l_0=a^2\xi_0, & m_0=b^2\eta_0, & n_0=c^2\zeta_0. \end{array}\right\} \qquad (63)$$

Такой видъ будутъ имѣть эти уравненія, предполагая, что за оси координатъ взяты главныя оси инерціи. Если-же за координатныя оси взять оси какого-либо сѣченія и нормаль къ нимъ, то, положивъ $p=\pi=0$ въ ур. (60) и (61), получимъ для комплекса перманентныхъ осей уравненіе:

$$X_1\xi_0\lambda_0+X_2\eta_0\mu_0+P\zeta_0\nu_0+K_1(\xi_0\nu_0+\zeta_0\lambda_0)+K_2(\eta_0\nu_0+\zeta_0\mu_0)=0, \quad (64)$$

и для координатъ линіи удара:

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=\lambda_0, & y_0=\mu_0, & z_0=\nu_0, \\ l_0=X_1\xi_0+K_1\zeta_0, & m_0=X_2\eta_0+K_2\zeta_0, & n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0+P\zeta_0. \end{array}\right\} \quad (65)$$

Хотя сила удара не имѣетъ вліянія на положеніе перманентной оси, а лишь на угловую скорость вращенія, но для простоты она была положена (15) равной единицы. Величина соотвѣтствующей угловой скорости будетъ зависѣть отъ положенія перманентной оси и линіи удара. Дѣйствительно, изъ ур. (18) и (19) имѣемъ:

$$\Xi^2+H^2+Z^2=1=Q^2\left(\frac{L^2}{a^4}+\frac{M^2}{b^4}+\frac{N^2}{c^4}\right);$$

вставляя изъ (20) и (21) вмѣсто Q, L, M и N ихъ значенія, получимъ:

$$M_0^2\theta^2=M_0^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2=\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2, \quad (66)$$

или, по ур. (63):

$$M_0^2\theta^2=\frac{l_0^2}{a^4}+\frac{m_0^2}{b^4}+\frac{n_0^2}{c^4}. \quad (67)$$

Изъ центра инерціи O опустимъ перпендикуляръ Oc на линію удара (C) (фиг. 1) и построимъ ось (G) момента удара, проведя въ приличную сторону перпендикуляръ къ *плоскости удара* OcC. Назовемъ *плоскостью момента удара* плоскость, проходящую черезъ ось момента удара, параллельно линіи удара. Сдѣлавъ такое-же построеніе для перманентной оси, получимъ *плоскость оси вращенія* $O\gamma\Gamma$ и *плоскость момента вращенія* (τ), проходящую черезъ центръ инерціи и параллельную прямымъ (Γ) и (τ). Первыя три изъ ур. (64) показываютъ, что линія удара (C) параллельна оси (τ) момента вращенія, т. е. что прямая (C) перпендикулярна къ плоскости

$O\gamma\Gamma$, а потому кратчайшее разстояніе между (C) и (Γ) есть перпендикуляръ $c\gamma_1$, опущенный изъ точки c на прямую (Γ); четырехугольникъ $Oc\gamma_1\gamma$ есть четырехугольникъ плоскій, къ плоскости котораго прямая (C) перпендикулярна. Точка c носитъ названіе *центра удара*, а точка γ_1 — *перманентнымъ центромъ вращенія*, или просто *перманентнымъ центромъ*. Разстоянія Oc, $O\gamma$ будемъ обозначать черезъ d и δ.

Такъ какъ сила удара равна единицѣ, то

$$x_0 = cos(Cx),\quad y_0 = cos(Cy),\quad z_0 = cos(Cz),$$
$$l_0 = d cos(Gx),\quad m_0 = d cos(Gy),\quad n_0 = d cos(Gz).$$

Формула (66) показываетъ, что координаты $(\xi_0, \eta_0, \dots)$ могутъ быть разсматриваемы какъ проэкціи и моменты относительно осей координатъ отрѣзка, равнаго $M_0\theta$, отложеннаго на перманентной оси; послѣднія-же изъ нихъ $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ суть вмѣстѣ съ тѣмъ проэкціи на оси координатъ отрѣзка равнаго $M_0\theta\delta$ отложеннаго на оси (τ) момента вращенія.

А такъ какъ ур. (62) даютъ:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2 = 1, \tag{68}$$

то

$$M_0\theta\delta = 1, \tag{69}$$

и мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{\delta} cos(\Gamma x), & \eta_0 &= \frac{1}{\delta} cos(\Gamma y), & \zeta_0 &= \frac{1}{\delta} cos(\Gamma z), \\ \lambda_0 &= cos(\tau x), & \mu_0 &= cos(\tau y), & \nu_0 &= cos(\tau z). \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Ур. (69) показываетъ, что при *одной и той-же силѣ совершеннаго удара, величина угловой скорости вызываемаго вращенія обратно пропорціональна разстоянію перманентной оси отъ центра инерціи*; и что при томъ-же условіи *перманентныя оси, вращеніе вокругъ которыхъ происходитъ съ*

одинаковою угловою скоростью, суть касательныя къ сферѣ, радіусъ которой обратно пропорціоналенъ угловой скорости вращенія.

Перемноживъ ур. (67) и (68) почленно, получимъ

$$M_0^2\theta^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=\frac{l_0^2}{a^4}+\frac{m_0^2}{b^4}+\frac{n_0^2}{c^4}\,. \qquad (71)$$

другими словами: *совершенные удары, вызывающіе вращенія съ одною и тою-же угловою скоростью, принадлежатъ къ комплексу втораго порядка* (71); они будутъ слѣдовательно общими лучами двухъ комплексовъ втораго порядка (29_3) и (71).

Сравненіе уравненій (25_3) и (29_3) показываетъ, что комплексъ совершенныхъ ударовъ такъ точно построенъ относительно эллипсоида, обратнаго эллипсоиду инерціи, какъ комплексъ перманентныхъ осей — относительно эллипсоида инерціи, такъ что достаточно разсмотрѣть одинъ изъ нихъ; мы остановимся на комплексѣ перманентныхъ осей.

Перманентныя оси суть тѣ прямыя пространства, которыхъ поляры относительно эллипсоида, обратнаго эллипсоиду инерціи, къ нимъ перпендикулярны[1].

Дѣйствительно, полярныя плоскости двухъ точекъ $(x_1y_1z_1)$ и $(x_2y_2z_2)$ перманентной оси по отношенію къ эллипсоиду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

параллельны плоскостямъ:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=0,$$

$$\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}=0;$$

---

[1]) G. Darboux. Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps. Bull. des sciences mathém. T. IV. 1880. p. 132.

линія же пересѣченія послѣднихъ, параллельная полярѣ перманентной оси, имѣетъ своими косинусами выраженія, пропорціональныя слѣдующимъ:

$$a^2(y_1z_2-z_1y_2)=a^2\lambda_0,\ b^2(z_1x_2-x_1z_2)=b^2\mu_0,\ c^2(x_1y_2-y_1x_2)=c^2\nu_0;$$

а такъ какъ косинусы самой прямой пропорціональны выраженіямъ:

$$x_2-x_1=\xi_0,\ y_2-y_1=\eta_0,\ z_2-z_1=\zeta_0,$$

то ур. (62) какъ разъ выражаетъ условіе перпендикулярности перманентной оси и ея поляры.

Главныя плоскости инерціи отсѣкаютъ на перманентной оси части, находящіяся между собою въ постоянномъ отношеніи [1].

Пусть ABC (фиг. 2) одна изъ перманентныхъ осей, пересѣкающая главныя плоскости инерціи въ точкахъ A, B и C. Опустимъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры на главныя оси инерціи Ox и Oy и обозначимъ черезъ α и β углы, образованныя прямою ABC съ этими осями. Тогда можно будетъ положить:

$$\lambda_0=Of.\zeta_0,\quad \mu_0=-Oa.\zeta_0,\quad \nu_0=Oa.cos\beta-Of.cos\alpha,$$
$$\xi_0=cos\alpha,\quad \eta_0=cos\beta.$$

Подставивъ эти значенія въ ур. (62) получимъ:

$$\frac{Oa.cos\beta}{Of.cos\alpha}=\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}.$$

Умножимъ числителя и знаменателя перваго отношенія

---

[1]) Th. Reye. Die Geometrie der Lage. Leipzig, 1882. T. II. p. 172.

на AB; тогда, имѣя въ виду что:

$$ABcos\beta=df, \; ABcos\alpha=Oa,$$
$$AB:BC=dB:Bb=df:Of,$$

получимъ:

$$AB:BC=\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}=Const.$$

что и требовалось доказать.

Перманентныя оси суть тѣ прямыя пространства, которыя параллельны одной изъ осей эллипса, получающагося въ сѣченіи эллипсоида инерціи плоскостью момента вращенія[1].

Дѣйствительно, если въ ур. (35) внесемъ вмѣсто направляющихъ косинусовъ прямой (Г) величины ξ_0, η_0 и ζ_0, которыя имъ пропорціональны, то косинусы второй оси къ (Г) будутъ:

$$\alpha_2:\beta_2:\gamma_2=(b^2-c^2)\zeta_0\eta_0:(c^2-a^2)\xi_0\zeta_0:(a^2-b^2)\eta_0\xi_0.$$

Рѣшая-же совмѣстно уравненія:

$$a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0=0,$$
$$\lambda_0\xi_0+\mu_0\eta_0+\nu_0\zeta_0=0,$$

относительно λ_0, μ_0, ν_0, получимъ:

$$\lambda_0:\mu_0:\nu_0=(b^2-c^2)\zeta_0\eta_0:(c^2-a^2)\xi_0\zeta_0:(a^2-b^2)\eta_0\xi_0,$$

а это показываетъ, что второю осью къ (Г) служитъ ось момента вращенія, такъ что самимъ сѣченіемъ будетъ плоскость момента вращенія.

Этотъ признакъ даетъ возможность построить всѣ перманентныя оси. Для этого беремъ въ эллипсоидѣ любое сѣченіе и его оси Ox и Oy. Проводя нормаль къ нимъ Oz, строимъ въ плоскостяхъ Ozx и Ozy системы прямыхъ, соотвѣтственно

[1]) R. Ball. The theory of Screws. Dublin. 1876. §§ 159, 160.

параллельныхъ осямъ Ox и Oy; это и будутъ перманентныя оси. Остается мѣнять положеніе сѣкущей плоскости, и мы получимъ всѣ перманентныя оси пространства. Такое-же построеніе для эллипсоида обратнаго даетъ линіи дѣйствія совершенныхъ ударовъ. Но кромѣ того, такъ какъ послѣднія параллельны осямъ соотвѣтствующихъ моментовъ вращеній, то:

Линія удара и соотвѣтствующая перманентная ось параллельны осямъ эллипса сѣченія эллипсоида инерціи плоскостью момента вращенія.

Изъ послѣднихъ свойствъ можно вывести слѣдующія слѣдствія:

§ 8. 1. Предположимъ, что ударъ (C) направленъ параллельно одной изъ главныхъ осей инерціи, напр. Oz; тогда всякая прямая плоскости xOy будетъ вмѣстѣ съ (C) представлять пару прямыхъ, параллельныхъ осямъ параллельнаго имъ сѣченія, т. е. будетъ перманентною осью; слѣд.:

Всякая прямая, лежащая въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи есть перманентная ось[1]. *Соотвѣтствующій совершенный ударъ перпендикуляренъ къ этой плоскости.* Очевидно, что и обратно: *Всякая прямая, параллельная одной изъ осей инерціи, есть перманентная ось; соотвѣтствующій ударъ направленъ по прямой, лежащей въ главной плоскости инерціи, перпендикулярной къ перманентной оси.*

2. Предположимъ, что линія удара (C) перемѣщается, оставаясь параллельной какой-либо прямой Oz. Такъ какъ ось (τ) момента вращенія, параллельная (C) всегда остается направленной по Oz, то соотвѣтствующія оси (Γ) лежатъ въ діаметральной плоскости xOy, перпендикулярной къ Oz; кромѣ того всѣ онѣ параллельны той прямой этой плоскости, которая вмѣстѣ съ (τ) составляетъ пару осей: *всѣ перманентныя оси, лежащія въ одной діаметральной плоскости, между собою*

---

[1]) T. Reye. Geometrie der Lage, p. 166.

параллельны; обратно: *всѣ параллельныя между собою перманентныя оси лежатъ въ одной діаметральной плоскости*[1]), ибо если направленіе (Г) дано, то тѣмъ самимъ дается направленіе второй оси къ ней, т. е. прямой (τ) или (*C*). Такъ какъ тоже можно сказать относительно совершенныхъ ударовъ, принявъ въ основаніе эллипсоидъ обратный, то слѣд.: *Удары, вызывающіе вращенія вокругъ параллельныхъ осей* (Г), *лежатъ въ одной плоскости и параллельны той прямой, которая вмѣстѣ съ направленіемъ* (Г) *составляетъ пару осей эллипсоида инерціи.*

3. *Перманентныя оси, выходящія изъ какой-либо точки M, лежатъ на конусѣ*[2]) *осей, соотвѣтствующемъ плоскости перпендикулярной къ радіусу вектору OM.* Пусть линія удара остается параллельной какой-либо плоскости xOy, такъ что (τ) вращается въ этой плоскости вокругъ точки O. Оси (Г), проходящія черезъ какую-либо точку M, лежащую на нормали Oz къ плоскости, должны быть параллельны образующимъ конуса осей, соотвѣтствующаго плоскости xOy; онѣ лежатъ слѣдовательно на такомъ-же конусѣ. Этотъ конусъ содержитъ три образующія, параллельныя главнымъ осямъ инерціи, нормаль къ плоскости и пару прямыхъ, соотвѣтственно параллельныхъ осямъ Ox и Oy сѣченія эллипсоида плоскостью xOy. Хотя этихъ шести образующихъ болѣе чѣмъ достаточно для опредѣленія конуса, но можно указать еще седьмую, параллельную тому діаметру эллипсоида, который сопряженъ съ плоскостью xOy; въ самомъ дѣлѣ, вторая ось къ нему, будучи съ нимъ сопряженной, лежитъ въ плоскости xOy и совпадаетъ слѣдовательно съ однимъ изъ положеній оси (τ). Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что конусы, соотвѣтствующіе различнымъ точкамъ прямой Oz равны между собою. Въ частномъ случаѣ,

---

1) Ibid. p. 170.

2) Ibid. p. 168.

когда точка M лежитъ на одной изъ главныхъ осей инерціи, конусъ обращается въ двѣ плоскости, совпадающія съ главными плоскостями инерціи, на пересѣченіи которыхъ лежитъ точка M. Разложеніе конуса на двѣ плоскости происходитъ также въ томъ случаѣ, когда точка M находится на одной изъ главныхъ плоскостей инерціи; въ этомъ случаѣ одна изъ плоскостей совпадаетъ съ тою плоскостью инерціи, на которой лежитъ точка M, другая-же проходитъ черезъ нормаль къ первой и черезъ прямую, проходящую черезъ M параллельно діаметру, сопряженному съ плоскостью перпендикулярной къ OM.

Удары, вызывающіе вращенія вокругъ осей (Γ), *выходящихъ изъ точки* M, *перпендикулярны къ радіусу вектору* OM *этой точки и суть образующія одного рода гиперболическаго параболоида*[1]. Дѣйствительно, обозначимъ черезъ (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) три какія-либо образующія конуса. Вращеніе вокругъ какой-либо четвертой образующей (Γ) можетъ быть разложено на три вращенія вокругъ прямыхъ (Γ_1), (Γ_2) и (Γ_3). Если обозначимъ черезъ (C), (C_1), (C_2) и (C_3) линіи дѣйствія соотвѣтствующихъ ударовъ, то ударъ по прямой (C) можетъ быть разложенъ на три удара по прямымъ (C_1), (C_2) и (C_3), а слѣдовательно эти четыре прямыя суть образующія одной и той-же линейчатой поверхности втораго порядка, которая будетъ въ данномъ случаѣ гиперболическимъ параболоидомъ, такъ какъ всѣ прямыя (C) параллельны одной и той-же плоскости. Такъ какъ каждыя три образующія конуса не лежатъ въ одной плоскости, то не могутъ лежать въ одной плоскости и линіи дѣйствія соотвѣтствующихъ ударовъ. Въ самомъ дѣлѣ, это имѣло-бы своимъ слѣдствіемъ возможность подобрать такія три силы для ударовъ, которыя взаимно уничтожались-бы, а

---

[1] Къ этой теоремѣ приходитъ также U. Mazoni въ своемъ мемуарѣ: «Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un sistema rigida. Nap. Rend. 1884. T. XXIII.

слѣдовательно уничтожились-бы взаимно и соотвѣтствующія угловыя скорости. Отсюда слѣдуетъ, что параболоидъ ударовъ можетъ обращаться въ двѣ плоскости лишь въ томъ случаѣ, когда обращается въ нихъ конусъ осей вращеній, т. е. когда точка M лежитъ на одной изъ осей или въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи.

4. *Перманентныя оси, лежащія въ одной плоскости* (m), *обертываютъ параболу*[1]), *касательная въ вершинѣ которой, параллельна второй оси къ нормали къ плоскости.*

Пусть Oz — нормаль къ плоскости (m) и пересѣкаетъ ее въ точкѣ M, xOy—плоскость сѣченія, параллельная плоскости (m). Оси (Γ), лежащія въ плоскости (m) должны обертывать кривую втораго порядка, такъ какъ черезъ какую-либо точку A этой плоскости не можетъ проходить болѣе двухъ касательныхъ къ кривой, иначе конусъ перманентныхъ осей, проходящихъ черезъ точку A, преобразовался-бы въ двѣ плоскости. Докажемъ, что къ этой кривой можно провести только одну касательную даннаго направленія, т. е. что кривая есть парабола. Для этого, замѣтивъ, что оси моментовъ (τ) для различныхъ (Γ), находящихся въ плоскости (m), лежатъ на конусѣ осей, соотвѣтствующемъ плоскости xOy, проведемъ черезъ O прямую Oa, которой (Γ) должна быть параллельна, и найдемъ на конусѣ вторую ось къ ней. Это будетъ ось момента (τ), соотвѣтствующая искомой (Γ). Возставивъ изъ O перпендикуляръ къ плоскости τOa, проведемъ черезъ точку пересѣченія его съ плоскостью (m) прямую, параллельную Oa; это и будетъ искомая единственная касательная. Если за Oa взять вторую ось ON къ нормали Oz, то предыдущее построеніе привело-бы къ безконечно удаленной касательной параболы, которая слѣдовательно параллельна ON. *Изъ касательныхъ къ параболѣ, кромѣ безконечно удаленной, обращаютъ наше вниманіе слѣ-*

[1]) T. Reye. Geometrie. p. 168.

дующія: три, по которымъ плоскость (m) *пересѣкаетъ главныя плоскости инерціи, одна, параллельная второй оси къ діаметру, сопряженному плоскости* xOy, *и двѣ, выходящія изъ* M *и параллельныя осямъ сѣченія* xOy. Такъ какъ двѣ послѣднія взаимно перпендикулярны, то *точка* M *лежитъ на директрисѣ параболы.*

Въ частномъ случаѣ, когда плоскость (m) перпендикулярна къ одной изъ главныхъ осей инерціи, парабола обращается въ двѣ безконечно удаленныя точки; оси (Г) образуютъ двѣ системы параллельныхъ прямыхъ, соотвѣтственно параллельныхъ двумъ остальнымъ осямъ инерціи. Если плоскость (m) проходитъ черезъ центръ инерціи, парабола обращается также въ двѣ точки, изъ коихъ одна совпадаетъ съ центромъ инерціи, а другая безконечно удалена въ направленіи второй оси къ діаметру, сопряженному къ плоскости.

Совокупность всѣхъ параболъ, лежащихъ въ параллельныхъ плоскостяхъ (m), *есть конусъ втораго порядка, имѣющій вершину въ центрѣ инерціи* [1]) *и нормальный къ соотвѣтствующему конусу осей.*

Черезъ какую-либо точку P проведемъ одну изъ плоскостей (m) и допустимъ, что въ ней черезъ точку P проходятъ двѣ касательныя a и b къ соотвѣтствующей параболѣ. Такъ какъ конусы осей для различныхъ точекъ прямой OP равны между собою и одинаково расположены, то черезъ каждую точку этой прямой пройдутъ двѣ образующія, соотвѣтственно параллельныя прямымъ a и b; онѣ будутъ касательными къ параболамъ, лежащимъ въ другихъ плоскостяхъ (m) и составятъ двѣ плоскости A и B, касательныя къ поверхности, занимаемой параболами. Отсюда слѣдуетъ, что черезъ каждую точку P пространства не можетъ проходить болѣе двухъ касательныхъ плоскостей къ поверхности и что всѣ онѣ проходятъ

---

[1]) Reye. l. c. p. 170.

черезъ центръ инерціи, который слѣдовательно совпадаетъ съ вершиной конуса втораго порядка, занимаемаго параболами. Ряду касательныхъ параллельныхъ a, какъ перманентнымъ осямъ, соотвѣтствуетъ одна ось (τ) момента вращенія; а такъ какъ послѣдняя лежитъ на конусѣ осей, то можно сказать, что образующія конуса осей соотвѣтственно перпендикулярны къ касательнымъ плоскостямъ конуса параболъ, т. е. что оба конуса нормальны другъ къ другу.

Совершенные удары, вызывающіе вращенія вокругъ осей, лежащихъ въ плоскости (m), суть образующія одного рода гиперболоида, ассимптотическій конусъ котораго равенъ конусу осей, соотвѣтствующему плоскости (m).

Пусть (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3)—три какія-либо касательныя къ параболѣ. Вращеніе вокругъ всякой четвертой касательной (Г) можетъ быть разложено на три, происходящихъ вокругъ осей (Γ_1), (Γ_2) и (Γ_3). Отсюда слѣдуетъ, что ударъ (C), вызывающій вращеніе вокругъ (Г), можетъ быть разложенъ на три удара по прямымъ (C_1), (C_2) и (C_3), соотвѣтствующимъ осямъ (Γ_1), (Γ_2) и (Γ_3). Это-же требуетъ, чтобы четыре прямыя (C), (C_1), (C_2) и (C_3) были-бы образующими одного рода линейчатой поверхности втораго порядка, которая будетъ въ данномъ случаѣ гиперболоидомъ, такъ какъ прямыя (C) параллельны (τ), лежащимъ на конусѣ осей, соотвѣтствующемъ плоскости (m).

5. Для выясненія той роли, которую играютъ образующія втораго рода въ гиперболическомъ параболоидѣ и гиперболоидѣ, докажемъ такую теорему:

Если (C_1) и (C_2) суть удары, вызывающія вращенія вокругъ осей (Γ_1) и (Γ_2), и если (C_1) и (Γ_2) пересѣкаются, то пересѣкаются также (C_2) и (Γ_1) [1].

Пусть $(\xi_0, \eta_0, \ldots)$ и $(\xi'_0, \eta'_0, \ldots)$ суть координаты осей (Γ_1) и (Γ_2); тогда координаты соотвѣтствующихъ ударовъ бу-

[1]) R. Ball. The Theory of Screws. Dublin, 1876. p. 48.

дуть $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, a^2\xi_0, b^2\eta_0, c^2\zeta_0)$ и $(\lambda_0', \mu_0' \ldots)$. Условіе пересѣченія прямыхъ (C_1) и (Γ_2):

$$a^2\xi_0\xi_0'+b^2\eta_0\eta_0'+c^2\zeta_0\zeta_0'+\lambda_0\lambda_0'+\mu_0\mu_0'+\nu_0\nu_0'=0,$$

вслѣдствіе полной симметріи координатъ, есть также условіе пересѣченія прямыхъ (C_2) и (Γ_1).

Отсюда слѣдуетъ:

Въ гиперболическомъ параболоидѣ (въ гиперболоидѣ), котораго образующія одного рода суть линіи ударовъ, вызывающихъ вращеніе вокругъ перманентныхъ осей, выходящихъ изъ одной точки (лежащихъ въ одной плоскости), образующія втораго рода суть перманентныя оси вращеній, вызываемыхъ ударами, проходящими черезъ ту-же точку (лежащими въ той-же плоскости) [1].

§ 9. Прежде чѣмъ перейти къ аналитическому изслѣдованію распредѣленія перманентныхъ осей, укажемъ направленіе тѣхъ прямыхъ, которыя играютъ особую роль въ отношеніи къ плоскости какого-либо сѣченія и съ которыми намъ уже приходилось отчасти встрѣчаться. Пусть xOy—плоскость какого-либо сѣченія, Ox и Oy направлены по его осямъ, Oz или OM нормаль къ нимъ, OM_1—діаметръ сопряженный плоскости сѣченія, OK—его проэкція на ту-же плоскость, ON—діаметръ сѣченія сопряженный съ OK, OT—нормаль къ нему. Такъ какъ ON есть діаметръ сопряженный съ OK и OM_1, то онъ сопряженъ съ плоскостью M_1OK, и такъ какъ діаметръ OM перпендикуляренъ къ ON, то они составятъ пару осей эллипсоида.

Принявъ въ основаніе ур. (59) эллипсоида инерціи и обозначивъ для краткости:

$$K=\sqrt{K_1^2+K_2^2},\quad T=\sqrt{K_2^2X_1^2+K_1^2X_2^2+X_1^2X_2^2},\quad T_1=\sqrt{K_2^2X_1^2+K_1^2X_2^2},$$

[1]) Теорема, относящаяся къ параболоиду, принадлежитъ U. Mazoni, l. c. p. 104.

будемъ имѣть для направляющихъ косинусовъ прямыхъ ON, OT, OM_1 и OK выраженія:

$$\frac{K_2}{K},\quad -\frac{K_1}{K},\quad 0 \text{ — для прямой } ON,$$

$$\frac{K_1}{K},\quad \frac{K_2}{K},\quad 0 \quad » \quad OT,$$

$$\frac{X_2K_1}{T},\quad \frac{X_1K_2}{T},\quad -\frac{X_1X_2}{T} \quad » \quad OM_1,$$

$$\frac{X_2K_1}{T_1},\quad \frac{X_1K_2}{T_1},\quad 0 \quad » \quad OK.$$

Уравненіе плоскости, сопряжённой направленію OM:

$$K_1x+K_2y+Pz=0.$$

§ 10. Разсмотримъ случай параллельныхъ перманентныхъ осей (Г). Проведя черезъ центръ инерціи прямую параллельную направленію (Г), прійимемъ ее за ось Oz въ ур. (64) и (65), положивъ въ нихъ:

$$\xi_0=\eta_0=0,\quad \nu_0=0;$$

получимъ:

$$K_1\lambda_0+K_2\mu_0=0, \tag{72}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=\lambda_0, & y_0=\mu_0, & z_0=\nu_0, \\ l_0=K_1\zeta_0, & m_0=K_2\zeta_0, & n_0=P\zeta_0. \end{array}\right\} \tag{73}$$

Ур. (72) даетъ направленіе ON (фиг. 3) для оси (τ) момента всѣхъ осей (Г), перпендикулярныхъ къ плоскости xOy; онѣ пересѣкаютъ слѣдовательно эту плоскость по прямой OT.

Линіи соотвѣтствующихъ ударовъ параллельны ON и, такъ какъ

$$l_0:m_0:n_0=cos(Gx):cos(Gy):cos(Gz)=K_1:K_2:P,$$

то онѣ лежатъ въ одной плоскости, сопряженной направленію (Г). Линіи ударовъ перпендикулярны къ плоскости zOТ, поэтому кратчайшее разстояніе $c\gamma_1$ между двумя соотвѣтствующими прямыми (C) и (Г) пересѣкается осью Oz въ точкѣ q подъ прямымъ угломъ. Обозначивъ $\gamma_1 q$ и cq черезъ δ и δ_1, будемъ имѣть въ данномъ случаѣ:

$$\zeta_0 = 1 : \delta, \quad n_0 = \delta_1,$$

и послѣднее изъ ур. (73) даетъ:

$$\delta\delta_1 = P, \tag{74}$$

т. е. *кратчайшее разстояніе между перманентною осью и линіей удара раздѣляется прямой, проходящей черезъ центръ инерціи и параллельной перманентной оси, на двѣ части, произведеніе которыхъ равно обратному значенію квадрата параллельнаго оси вращенія радіуса вектора эллипсоида инерціи* [1]).

Возвышая въ квадратъ и складывая три послѣднихъ ур. (73), получаемъ соотношеніе между разстояніями $Oc = d$ и $O\gamma = \delta$ двухъ соотвѣтствующихъ прямыхъ (C) и (Г) отъ центра инерціи:

$$d\delta = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + P^2}. \tag{75}$$

Это произведеніе также постоянно при данномъ направленіи (Г).

Если Oz есть одна изъ главныхъ осей инерціи, всѣ прямыя ей параллельныя могутъ быть приняты за оси (Г). Оси (Г) съ одною и тою-же угловою скоростью отстоятъ отъ главной оси Oz на одномъ и томъ-же разстояніи $\frac{1}{M_0\theta}$, т. е. суть про-

---

[1]) D. Turazza. Il moto dei systemi rigidi. Padova. 1868. p. 42., ур. (23).

изводящія прямаго круглаго цилиндра, ось котораго есть Oz, а радіусъ равенъ $\frac{1}{M_0\theta}$. Линіи соотвѣтствующихъ ударовъ лежатъ въ плоскости xOy и при данномъ θ касаются окружности, имѣющей центръ въ центрѣ инерціи, а радіусъ основанія (75)

$$d = c^2 M_0 \theta,$$

гдѣ c есть радіусъ инерціи, параллельный Oz.

Къ болѣе интереснымъ результатамъ прійдемъ, если, принявъ во вниманіе, что параллельныя оси (Г) лежатъ въ одной діаметральной плоскости, пріймемъ ее за плоскость xOy въ ур. (64) и (65), положивъ тамъ:

$$\zeta_0 = 0,\ \lambda_0 = \mu_0 = 0,\ \nu_0 = 1;$$

тогда получимъ:

$$K_1\xi_0 + K_2\eta_0 = 0, \tag{76}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0&=0, & y_0&=0, & z_0&=1, \\ l_0&=X_1\xi_0, & m_0&=X_2\eta_0, & n_0&=0. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Ур. (76) опредѣляетъ направленіе пучка параллельныхъ осей (Г), лежащихъ въ плоскости сѣченія, и показываетъ, что онѣ параллельны прямой ON (фиг. 4).

Линія удара перпендикулярна къ плоскости xOy и пересѣкаетъ ее въ точкѣ c, центрѣ удара. Обозначивъ черезъ $(x_1\ y_1)$ координаты этой точки, будемъ имѣть:

$$X_1\xi_0 = l_0 = y_1,\ X_2\eta_0 = m_0 = -x_1. \tag{78}$$

Опредѣливъ отсюда ξ_0 и η_0, напишемъ (4) уравненіе прямой (Г):

$$\frac{xx_1}{X_2} + \frac{yy_1}{X_1} + 1 = 0. \tag{79}$$

Хотя это уравненіе показываетъ, что прямая (Г) параллельна тому діаметру эллипса сѣченія, который сопряженъ направленію Oc, однако то-же будетъ имѣть мѣсто по отношенію къ другому эллипсу [1]:

$$\frac{x^2}{X_2}+\frac{y^2}{X_1}=1, \tag{80}$$

который назовемъ *центральнымъ*.

Продолжимъ Oc до встрѣчи съ прямой (Г) въ точкѣ c'. Координаты $(x'y')$ этой точки найдутся, рѣшая совмѣстно ур. (79) и уравненіе прямой Oc:

$$x:y=x_1:y_1$$

и будутъ равны:

$$x'=-\frac{X_1X_2x_1}{X_1x_1^2+X_2y_1^2},\quad y'=-\frac{X_1X_2y_1}{X_1x_1^2+X_2y_1^2};$$

отсюда:

$$Oc'^2=\frac{X_1^2X_2^2Oc^2}{(X_1x_1^2+X_2y_1^2)^2}.$$

Съ другой стороны центральный эллипсъ отсѣкаетъ отъ прямой Oc радіусъ векторъ ρ, длина котораго опредѣляется уравненіемъ:

$$\rho^2=\frac{X_1X_2 . Oc^2}{X_1x_1^2+X_2y_1^2},$$

такъ что будемъ имѣть:

$$Oc.Oc'=\rho^2. \tag{81}$$

---

[1]) Poinsot пользуется такимъ эллипсомъ при изслѣдованіи распредѣленія перманентныхъ осей въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи. Questions dynamiques. Sur la percussion des corps. Liouville. Journal. 1857. T. II. p. 321.

Это уравненіе показываетъ, что центръ удара и точка c' образуютъ на прямой Oc инволюцію, такъ что по одной изъ нихъ можно легко найти другую; когда c' будетъ центромъ удара, прямая (Г) пройдетъ черезъ точку c [1]). Вмѣсто того, чтобы строить центральный эллипсъ можно, воспользовавшись формулой (74), искать геометрическое мѣсто перманентныхъ центровъ, такъ какъ мѣсто центровъ ударовъ c есть прямая Oc. Въ ур. (74) введемъ $\delta_1 = cq = Oq tg(CON)$, $\delta = \gamma_1 q$ и обозначимъ черезъ ρ_1 тотъ діаметръ эллипса сѣченія, который параллеленъ (Г); тогда будемъ имѣть:

$$\gamma_1 q . Oq = \frac{1}{\rho_1^2 tg(CON)},$$

такъ какъ $\gamma_1 q$ и Oq суть прямоугольныя координаты перманентнаго центра γ_1 по отношенію къ осямъ ON и OT, то мѣсто точки γ_1 есть равносторонняя гипербола, для которой эти прямыя суть ассимптоты [2]),

Въ томъ случаѣ когда (Г) лежитъ въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи, она можетъ занимать тамъ произвольное положеніе, хотя связь между центромъ удара и направленіемъ (Г) остается та-же, какъ и въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ. Перемѣщая c по какой-либо прямой Oc, мы будемъ перемѣщать (Г) такъ, что она всегда останется параллельной діаметру сопряженному съ Oc. Такъ какъ гипербола перманентныхъ центровъ будетъ мѣняться съ измѣненіемъ направленія Oc, то

---

[1]) Ср. Poinsot. l. c. 323, гдѣ даются эти теоремы лишь для случая осей, лежащихъ въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи. См. также D. Turazza, l. c. § 75. Turazza не пользуется эллипсомъ (80), такъ что ур. (81) у него дается въ формѣ $Oc.Oc' = const.$, хотя должно замѣтить, что обобщеніе сдѣлано въ другомъ направленіи; вмѣсто одной импульсивной силы предполагается система такихъ силъ. Этотъ случай изслѣдуется въ 3-й главѣ этого сочиненія.

[2]) Turazza, l. c. § 73 съ обобщеніемъ, указаннномъ въ [1]).

удобнѣе остановиться на центральномъ эллипсѣ Poinsot. При этомъ тѣмъ изъ прямыхъ (Г), которыя обертываютъ окружность съ центромъ въ O и радіуса $\delta = \frac{1}{M_0\theta}$ соотвѣтствуютъ равныя угловыя скорости θ. Ур. (78) въ примѣненіи къ главной плоскости инерціи даютъ:

$$\cos(\Gamma x) = \frac{y_1}{a^2 M_0 \theta}, \quad \cos(\Gamma y) = -\frac{x_1}{b^2 M_0 \theta};$$

откуда:

$$\frac{x_1^2}{b^4 M_0^2 \theta^2} + \frac{y_1^2}{a^4 M_0^2 \theta^2} = 1.$$

т. е. *удары, вызывающіе вращеніе съ одинаковою угловою скоростью вокругъ осей, лежащихъ въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи xOy, направлены по производящимъ эллиптическаго цилиндра, мнимая ось котораго есть ось Oz, а двѣ дѣйствительныя оси направлены по двумъ другимъ осямъ инерціи.*

§ 11. Для полученія конуса осей, соотвѣтствующаго плоскости xOy какого-либо сѣченія, мы должны будемъ въ ур. (36) положить $\alpha = \beta = 0$, а за функцію U взять лѣвую часть ур. (59); тогда получимъ:

$$(X_1 - X_2)xy + K_1 yz - K_2 xz = 0. \tag{82}$$

Если такой конусъ перенести параллельно самому себѣ въ точку M оси Oz (фиг. 5), то онъ представитъ геометрическое мѣсто перманентныхъ осей (Г), проходящихъ черезъ эту точку. Представивъ себѣ этотъ конусъ въ такомъ положеніи, получимъ пересѣченіе его съ плоскостью xOy, положивъ въ ур. (82) $z = OM = -R$:

$$(X_1 - X_2)xy - K_1 R y + K_2 R x = 0. \tag{83}$$

Это равносторонняя гипербола, ассимптоты которой параллельны осямъ Ox и Oy сѣченія. Касательная въ началѣ

координатъ есть прямая OT, такъ что ON — нормаль къ гиперболѣ. Координаты центра C_0 гиперболы суть:

$$\alpha_0 = R\frac{K_1}{X_1 - X_2}, \quad \beta_0 = -R\frac{K_2}{X_1 - X_2}, \tag{84}$$

а уравненіе кривой, отнесенной къ центру:

$$xy = -R^2\frac{K_1K_2}{X_1 - X_2}.$$

При перемѣщеніи точки M вдоль OM получаемъ пучокъ гиперболъ, имѣющихъ общую точку M, общую касательную въ ней и одинаково направленныя ассимптоты. Для полнаго опредѣленія каждой изъ такихъ кривыхъ достаточно знать еще одну ея точку. Но такъ какъ извѣстно, что въ числѣ образующихъ конуса есть одна MK, параллельная діаметру OM_1 сопряженному въ эллипсоидѣ съ плоскостью сѣченія, то проведя черезъ M такую прямую найдемъ на пересѣченіи съ плоскостью xOy на прямой OK точку K, принадлежащую гиперболѣ. Величина и направленіе осей конуса опредѣляются системой уравненій:

$$(X_1 - X_2)\mu - K_2\nu = p\lambda,$$

$$(X_1 - X_2)\lambda + K_1\nu = p\mu,$$

$$-K_2\lambda + K_1\mu = p\nu;$$

$$V(p) = \begin{vmatrix} p, & -(X_1 - X_2), & K_2 \\ -(X_1 - X_2), & p, & -K_1 \\ K_2, & -K_1, & p \end{vmatrix} = 0, \tag{85}$$

гдѣ:

$$V(p) = p^3 - p\Big((X_1 - X_2)^2 + K_1^2 + K_2^2\Big) + 2(X_1 - X_2)K_1K_2. \tag{86}$$

Причемъ замѣтимъ, что, обозначивъ черезъ p_1, p_2 и p_3 три корня этого уравненія, будемъ имѣть:

$$p_1p_2p_3 = -2(X_1 - X_2)K_1K_2. \tag{87}$$

Коэффиціенты ур. (85) можно выразить въ функціи косинусовъ α, β и γ угловъ, образованныхъ прямой OM съ главными осями инерціи. Воспользовавшись для этой цѣли ур. (55) и (51), получимъ:

$$p^3-p(A_1^2\alpha^2+B_1^2\beta^2+C_1^2\gamma^2)+A_1B_1C_1\alpha\beta\gamma=0. \qquad (88)$$

Если разсматривать въ этомъ уравненіи p какъ постоянное, то оно представитъ коническую поверхность—мѣсто тѣхъ прямыхъ OM, для точекъ которыхъ одна изъ осей конуса (82) имѣетъ данное значеніе. Очевидно, что черезъ каждую прямую OM проходитъ три такихъ поверхности.

Производящія конуса осей, касающіяся шара:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{M_0^2\theta^2},$$

суть перманентныя оси съ одною и тою-же угловою скоростью θ и будутъ дѣйствительны, только когда:

$$1:M_0\theta\leqslant R;$$

въ послѣднемъ случаѣ онѣ суть также производящія прямаго круглаго конуса, ось котораго есть прямая MO, а вершина въ M. Сѣченіе этого конуса съ плоскостью xOy есть кругъ, центръ котораго въ O, а радіусъ r легко опредѣляется изъ фиг. 6, гдѣ:

$$MB^2=MO^2-BO^2=\frac{R^2M_0^2\theta^2-1}{M_0^2\theta^2},$$

$$tgDMO=BO:MB=\frac{1}{\sqrt{R^2M_0^2\theta^2-1}},$$

$$r=OD=MO\,tgDMO=\frac{R}{\sqrt{R^2M_0^2\theta^2-1}},$$

Этотъ кругъ пересѣкаетъ гиперболу вообще въ четырехъ точкахъ, соединивъ которыя съ M, получимъ четыре перма-

нентныя оси съ одинаковою угловою скоростью θ. Наименьшему значенію $\frac{1}{M_0 R}$ соотвѣтствуютъ двѣ производящія параллельныя осямъ Ox и Oy сѣченія.

Перманентнымъ осямъ, лежащимъ на конусѣ, соотвѣтствуетъ параболоидъ ударовъ. Координаты линіи удара найдутся изъ ур. (65), полагая тамъ $\nu_0=0$; тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &x_0=\lambda_0, \quad y_0=\mu_0, \quad z_0=\nu_0=0, \\ &l_0=X_1\xi_0+K_1\zeta_0, \quad m_0=X_2\eta_0+K_2\zeta_0, \quad n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0+P\zeta_0. \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Но такъ какъ оси (Γ) пересѣкаютъ Oz на разстояніи R отъ начала, то по формуламъ (3) можно положить:

$$\lambda_0=-R\eta_0, \quad \mu_0=R\xi_0, \qquad (90)$$

такъ что, помня первыя три ур. (89):

$$\left.\begin{aligned} l_0&=yz_0-zy_0=-zy_0=-z\mu_0=-zR\xi_0, \\ m_0&=zx_0-xz_0=zx_0=z\lambda_0=-zR\eta_0, \\ n_0&=xy_0-yx_0=x\mu_0-y\lambda_0=(x\xi_0+y\eta_0)R. \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

Уравнивая значенія l_0, m_0, n_0 изъ ур. (89) и (91), получимъ уравненія прямой (C):

$$(X_1+Rz)\xi_0+K_1\zeta_0=0,$$
$$(X_2+Rz)\eta_0+K_2\zeta_0=0,$$
$$(K_1-xR)\xi_0+(K_2-yR)\eta_0+P\zeta_0=0,$$

откуда, исключая ξ_0, η_0, ζ_0, найдемъ уравненіе поверхности:

$$\left.\begin{aligned} &(K_1x+K_2y+Pz)R^2z+\Big(P(X_1+X_2)-(K_1^2+K_2^2)\Big)Rz+ \\ &+K_2X_1Ry+K_1X_2Rx+PX_1X_2-X_1K_2^2-X_2K_1^2=0. \end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Направляющими плоскостями параболоида служатъ плоскость

xOy и плоскость сопряженная направленію OM въ эллипсоидѣ. Такъ какъ линіи ударовъ, лежащія на параболоидѣ, параллельны плоскости xOy, то опредѣлимъ, на какомъ разстояніи z отъ этой плоскости находится та изъ нихъ, которой соотвѣтствуетъ какая-либо перманентная ось ML, лежащая на конусѣ. Имѣя въ виду ур. (89) и (90), опредѣлимъ изъ ур. (64) величину ζ_0:

$$\zeta_0 = -\frac{1}{R}\frac{(X_1-X_2)x_0y_0}{K_1x_0+K_2y_0}; \tag{93}$$

слѣдовательно:

$$l_0 = \frac{X_1y_0}{R} + K_1\zeta_0 = \frac{1}{R}\frac{X_1K_2y_0+X_2K_1x_0}{K_1x_0+K_2y_0}\,y_0.$$

Сравнивая-же это уравненіе съ первымъ ур. (91), получаемъ:

$$z = -\frac{1}{R}\frac{X_1K_2y_0+X_2K_1x_0}{K_1x_0+K_2y_0}. \tag{94}$$

Линія удара пересѣкаетъ плоскость OML въ центрѣ удара c, причемъ прямая Oc есть діаметръ сѣченія OML, сопряженный направленію ML. Зная направленіе Oc и разстояніе z точки c отъ плоскости xOy, опредѣлимъ вполнѣ линію удара. Если изъ точки c опустить перпендикуляръ cc' на Oz, то прямая cc' параллельна плоскости xOy и уравненіе ея проэкціи на эту плоскость есть:

$$y:x = -x_0:y_0.$$

Исключивъ отношеніе $x_0:y_0$ изъ этого уравненія и изъ ур. (94), получимъ гиперболическій параболоидъ — мѣсто прямыхъ cc'. Геометрическое мѣсто центровъ ударовъ есть очевидно пересѣченіе этого параболоида съ параболоидомъ ударовъ.

Такъ какъ:

$$\cos(COK) = \frac{X_1K_2y_0+X_2K_1x_0}{T_1}, \qquad \cos(COT) = \frac{K_1x_0+K_2y_0}{K},$$

то ур. (94) можно написать:

$$z = -\frac{T_1}{KR}\frac{Cos(COK)}{Cos(COT)}. \tag{95}$$

Перманентныя оси, лежащія конусѣ и параллельныя осямъ Ox и Oy сѣченія, имѣютъ наименьшія угловыя скорости. Ихъ вызываютъ удары, направленныя по производящимъ параболоида, соотвѣтственно параллельнымъ осямъ Oy и Ox. Полагая въ уравненіяхъ прямой (C) сначала $\eta_0 = \zeta_0 = 0$, а затѣмъ $\xi_0 = \zeta_0 = 0$, получимъ координаты z' и x', z'' и y'' точекъ пересѣченія этихъ производящихъ съ плоскостями xOz и yOz:

$$z' = -\frac{X_1}{R},\quad x' = \frac{K_1}{R},$$

$$z'' = -\frac{X_2}{R},\quad y'' = \frac{K_2}{R}.$$

§ 12. Перманентныя оси, лежащія въ одной плоскости (m), обертываютъ параболу, и всѣ параболы, лежащія въ параллельныхъ плоскостяхъ, образуютъ конусъ втораго порядка, вершина котораго лежитъ въ центрѣ инерціи, и притомъ конусъ, нормальный къ конусу осей. Но конусъ нормальный къ конусу (82) будетъ представленъ уравненіемъ:

$$K_1x^2 + K_2y^2 + (X_1 - X_2)^2z^2 + 2K_2(X_1 - X_2)yz - 2K_1(X_1 - X_2)xz + \\ + 2K_1K_2xy = 0.$$

Поэтому для полученія параболы, лежащей въ плоскости (m), перпендикулярной къ OM, нужно внести $z = R$ въ уравненіе конуса; получимъ:

$$(K_1x + K_2y)^2 + (X_1 - X_2)R\Big(2K_2y - 2K_1x + (X_1 - X_2)R\Big) = 0. \tag{96}$$

Извѣстно, что сѣченіе двухъ конусовъ, нормальныхъ другъ къ другу и имѣющихъ общую вершину, какою-либо плоскостью, суть кривыя обратныя (*polarreciprok*) по отношенію къ основанію перпендикуляра, опущеннаго изъ общей вершины на сѣкущую плоскость [1]). Пусть напр. AB (фиг. 7) есть касательная въ точкѣ A къ гиперболѣ сѣченія плоскостью (m) конуса осей. Опустивъ изъ M перпендикуляръ MB на касательную, найдемъ на немъ такую точку A_1, чтобы:

$$MA_1.MB = -R^2,$$

точка A_1 будетъ принадлежать параболѣ. Знакъ минусъ въ этомъ уравненіи показываетъ, что разстоянія MA_1 и MB откладываются въ прямопротивуположную сторону. Однако эти разстоянія будутъ откладываться въ ту-же сторону, если построить параболу обратную кривой пересѣченія конуса осей, имѣющаго вершину въ M, съ плоскостью xOy, т. е. кривой (83). Для построенія вершины параболы достаточно продолжить ON до встрѣчи во второй разъ съ гиперболой и построить касательную къ ней въ этой точкѣ; точка параболы, соотвѣтствующая этой касательной, и будетъ ея вершиной.

Для полученія гиперболоида ударовъ, соотвѣтствующаго перманентнымъ осямъ, обертывающимъ параболу, положимъ въ ур. (65) $\zeta_0=0$, тогда получимъ:

$$l_0=X_1\xi_0, \quad m_0=X_2\eta_0, \quad n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0. \qquad (97)$$

Воспользовавшись затѣмъ ур. (90), мы получимъ для линіи удара уравненія:

$$Ryz_0-y_0(Rz+X_1)=0,$$
$$Rxz_0-x(Rz+X_2)=0,$$
$$y(Rx-K_1)-x_0(Ry-K_2)=0.$$

---

[1]) Salmon - Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig. 1879. I. p. 157.

Остается исключить отсюда x_0, y_0, z_0 для полученія искомой поверхности:

$$R(X_1-X_2)xy+RK_1yz-RK_2xz-K_2X_1x+K_1X_2y=0. \quad (98)$$

Гиперболоидъ проходитъ черезъ начало координатъ и имѣетъ въ числѣ своихъ образующихъ ось Oz и двѣ другія параллельныя осямъ Ox и Oy сѣченія. Координаты центра:

$$\alpha=\frac{K_1}{2R},\ \beta=\frac{K_2}{2R},\ \gamma=-\frac{X_1+X_2}{2R}, \quad (99)$$

и уравненіе поверхности, отнесенное къ центру:

$$2(X_1-X_2)xy+2K_1yz-2K_2xz-\frac{(X_1+X_2)K_1K_2}{2R^2}=0.$$

Для опредѣленія величины и направленія осей будемъ имѣть тѣ-же ур. (85), какія мы имѣли для конуса осей, такъ что имѣя въ виду ур. (87), получимъ уравненіе поверхности, отнесенное къ центру и осямъ:

$$p_1x^2+p_2y^2+p_3z^2+\frac{p_1p_2p_3}{4R^2}=0. \quad (100)$$

Такъ какъ ось Oz есть одна изъ образующихъ гиперболоида и именно того рода, къ которому принадлежатъ перманентныя оси, то черезъ начало координатъ проходитъ образующая другого рода, пересѣкаемая перманентными осями. Эта образующая есть діаметръ OM_1, сопряженный плоскости сѣченія. Если $(\xi_0,\ \eta_0\ 0)$ величины, опредѣляющія направленіе одной изъ осей (Г'), то линія удара пересѣкаетъ OM_1 въ разстояніи ρ отъ начала въ точкѣ M_1, координаты которой:

$$\rho\frac{X_2K_1}{T},\ \rho\frac{X_1K_2}{T},\ -\rho\frac{X_1X_2}{T}.$$

Для опредѣленія ρ воспользуемся послѣднимъ изъ ур. (97):

$$n_0 = x_1 y_0 - y_1 x_0 = x_1 R\xi_0 + y_1 R\eta_0 = K_1\xi_0 + K_2\eta_0;$$

вставивъ сюда вмѣсто x_1 и y_1 координаты точки M_1, получимъ:

$$\rho = \frac{T}{R} \frac{K_1\xi_0 + K_2\eta_0}{X_2 K_1\xi_0 + X_1 K_2\eta_0}$$

или, какъ при выводѣ ур. (95):

$$\rho = \frac{TK}{T_1 R} \frac{\cos(\Gamma OT)}{\cos(\Gamma OK)} = \frac{K}{R\cos(M_1 OK)} \frac{\cos(\Gamma OT)}{\cos(\Gamma OK)}. \quad (101)$$

Этимъ разстояніемъ и своимъ направленіемъ линія удара вполнѣ опредѣляется.

§ 13. Точка на перманентной оси (Г), названная перманентнымъ центромъ, играетъ очень важную роль въ механикѣ. Она обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что центробѣжныя силы, развивающіяся при вращеніи твердаго тѣла вокругъ перманентной оси, при приведеніи ихъ къ этой точкѣ оказываются эквивалентными одной силѣ, моментъ-же пары равенъ нулю. Подъ вліяніемъ совершеннаго удара вращеніе вокругъ оси (Г) происходитъ совершенно свободно лишь въ первый моментъ. Если-же мы желаемъ, чтобы и затѣмъ тѣло вращалось вокругъ той-же оси, то ее нужно укрѣпить вообще говоря въ двухъ точкахъ. Въ томъ только случаѣ, когда одна изъ точекъ прикрѣпленія совпадаетъ съ перманентнымъ центромъ оси вращенія, укрѣпленіе въ другой точкѣ излишне, такъ какъ центробѣжныя силы, развивающіяся при вращеніи, полностью уничтожаются реакціей первой точки. Наконецъ, въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда перманентная ось совпадаетъ съ одной изъ главныхъ осей инерціи, центробѣжныя силы эквивалентны нулю, такъ что всякое укрѣпленіе оси вращенія излишне.

Укажемъ методъ, предложенный Beltrami [1]), для полученія координатъ перманентныхъ центровъ, видоизмѣнивъ его такимъ образомъ, чтобы результатъ не зависѣлъ отъ выбора координатныхъ осей, и слѣдовательно отъ вида уравненія комплекса.

Въ силу первыхъ трехъ ур. (63), а также ур. (5), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0\lambda_0+\eta_0\mu_0+\zeta_0\nu_0=0\,, \\ l_0\lambda_0+m_0\mu_0+n_0\nu_0=0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно отношеній $\lambda_0:\mu_0:\nu_0$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0&=y\zeta_0-z\eta_0=(m_0\zeta_0-n_0\eta_0)\alpha\,, \\ \mu_0&=z\xi_0-x\zeta_0=(n_0\xi_0-l_0\zeta_0)\alpha\,, \\ \nu_0&=x\eta_0-y\xi_0=(l_0\eta_0-m_0\xi_0)\alpha\,, \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

гдѣ x, y и z координаты какой-либо точки прямой (Г), а множитель α—коэффиціентъ пропорціональности. Мы удовлетворимъ этимъ уравненіямъ, если, оставивъ β неопредѣленнымъ, положимъ:

$$x=(\beta\xi_0+l_0)\alpha,\quad y=(\beta\eta_0+m_0)\alpha,\quad z=(\beta\zeta_0+n_0)\alpha. \qquad (104)$$

Такъ могутъ быть представлены координаты какой-либо точки прямой (Г). Перманентный центръ можетъ быть опредѣленъ какъ точка пересѣченія прямой (Г) съ плоскостью, проходящей черезъ соотвѣтствующую прямую (C) перпендикулярно къ (Г), т. е. съ плоскостью:

$$(y\nu_0-z\mu_0-l_0)(\eta_0\nu_0-\zeta_0\mu_0)+(z\lambda_0-x\nu_0-m_0)(\zeta_0\lambda_0-\xi_0\nu_0)+$$
$$+(x\mu_0-y\lambda_0-n_0)(\xi_0\mu_0-\eta_0\lambda_0)=0.$$

---

[1]) E. Beltrami. Sulla teoria degli assi di rotazione. Collectanea in memoriam Chelini. p. 340.

Въ самомъ дѣлѣ, эта плоскость проходитъ черезъ прямую (C), такъ какъ первые множители трехъ членовъ лѣвой части суть лѣвыя части уравненій прямой (C); кромѣ того она перпендикулярна къ прямой (Γ), такъ какъ уравненіе ея можно представить въ видѣ:

$$\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z = l_0(\eta_0\nu_0 - \zeta_0\mu_0) + m_0(\zeta_0\lambda_0 - \xi_0\nu_0) + \\ + n_0(\xi_0\mu_0 - \eta_0\lambda_0).$$

Преобразуемъ правую часть этого уравненія, на основаніи ур. (103). Коэффиціентъ при l_0 можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$\alpha l_0(\xi_0^2 + y_0^2 + \zeta_0^2) + \alpha\xi_0(l_0\xi_0 + m_0\eta_0 + n_0 z_0).$$

Умноживъ выраженія подобныя этому на l_0, m_0 и n_0, сложимъ; тогда, имѣя въ виду, что возвышая въ квадратъ и складывая ур. (103), находимъ:

$$(l_0^2 + m_0^2 + n_0^2)(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2) - (l_0\xi_0 + m_0\eta_0 + n_0\zeta_0)^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad (105)$$

получимъ уравненіе искомой плоскости въ окончательной формѣ:

$$\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z = \frac{1}{\alpha}. \quad (106)$$

Внеся сюда вмѣсто x, y и z ихъ значенія (104), получимъ соотношеніе, которое должно имѣть мѣсто между α и β въ случаѣ перманентнаго центра:

$$\beta(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2) + a^2\xi_0^2 + b^2\eta_0^2 + c^2\zeta_0^2 = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (107)$$

Подставляя ур. (103) въ ур. (62) комплекса, убѣдимся, что они ему удовлетворяютъ, если вмѣсто l_0, m_0, n_0 внести значенія (63), такъ что ур. (104) опредѣляютъ точку на перманентной оси вращенія. Отсюда, подобно тому какъ это было сдѣлано для первыхъ трехъ ур. (26) на стр. 20, легко

докажемъ, что ур. (104) не мѣняютъ своего вида при преобразованіи координатъ.

Предположимъ, что оси координатъ совпадаютъ съ главными осями инерціи; тогда будутъ имѣть мѣсто всѣ ур. (63), и мы получимъ изъ ур. (104):

$$\xi_0 = \frac{x}{(a^2+\beta)\alpha}, \quad \eta_0 = \frac{y}{(b^2+\beta)\alpha}, \quad \zeta_0 = \frac{z}{(c^2+\gamma)\alpha}. \qquad (108)$$

Внеся эти значенія въ ур. (106), получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2+\beta} + \frac{y^2}{b^2+\beta} + \frac{z^2}{c^2+\beta} = 1. \qquad (109)$$

Если x, y и z означаютъ координаты какой-либо точки M, то ур. (108) даютъ для каждаго значенія β направленіе одной изъ прямыхъ (Г), проходящихъ черезъ эту точку. Если же точка M есть перманентный центръ, то она должна лежать на одномъ изъ софокусныхъ эллипсоидовъ, представляемыхъ ур. (109); тогда, какъ показываетъ ур. (108), ось (Г) направлена по нормали къ одному изъ софокусныхъ эллипсоидовъ, проходящихъ черезъ эту точку. Такъ какъ черезъ каждую точку пространства проходятъ три такихъ поверхности и онѣ между собою ортогональны, то мы получаемъ такую теорему:

Каждая точка пространства служитъ перманентнымъ центромъ для трехъ перманентныхъ осей; онѣ взаимно перпендикулярны и направлены по нормалямъ къ софокуснымъ эллипсоидамъ (109), проходящимъ черезъ эту точку [1].

Разсмотримъ распредѣленіе перманентныхъ центровъ для осей, лежащихъ въ какой-либо плоскости. Принявъ за плоскость xOy плоскость ей параллельную, будемъ имѣть по ур. (97) и (104):

$$x=\alpha(X_1+\beta)\xi_0, \quad y=\alpha(X_2+\beta)\eta_0, \quad z=\alpha(K_1\xi_0+K_2\eta_0).$$

---

[1]) Beltrami, l. c. p. 348.

Такъ какъ $\zeta_0=0$, $z=R$, то изъ этихъ уравненій и ур. (106) слѣдуетъ, что координаты проэкцій разсматриваемыхъ перманентныхъ центровъ на плоскость xOy удовлетворяютъ такимъ уравненіямъ:

$$\frac{x^2}{X_1+\beta}+\frac{y^2}{X_2+\beta}=1, \tag{110}$$

$$\frac{K_1x}{X_1+\beta}+\frac{K_2y}{X_2+\beta}=R. \tag{111}$$

Послѣднее уравненіе представляетъ поляру точки съ координатами $\frac{K_1}{R}$, $\frac{K_2}{R}$ къ одному изъ софокусныхъ эллипсовъ (110), такъ что мы можемъ сказать:

Проэкціи перманентныхъ центровъ осей, лежащихъ въ какой-либо плоскости, на параллельную ей діаметральную плоскость, суть точки касанія касательныхъ проведенныхъ изъ одной и той-же точки къ системѣ софокусныхъ эллипсовъ.

Методъ, употребленный для розысканія перманентныхъ центровъ, можно приложить также къ опредѣленію центра удара.

Обозначивъ для краткости:

$$l=\frac{x_0}{a^2},\quad m=\frac{y_0}{b^2},\quad n=\frac{z_0}{c^2}, \tag{112}$$

и имѣя въ виду ур. (29_3), получимъ вмѣсто ур. (102):

$$ll_0+mm_0+nn_0=0,$$
$$x_0l_0+y_0m_0+z_0n_0=0.$$

Рѣшая эти уравненія относительно отношеній $l_0:m_0:n_0$ и поступая въ дальнѣйшемъ такъ-же, какъ въ предыдущемъ случаѣ, мы должны будемъ въ окончательномъ результатѣ (104) сдѣлать замѣну l_0, m_0, n_0 на l, m, n, а ξ_0, η_0, ζ_0—на x_0, y_0, z_0.

Тогда получимъ для координатъ какой-либо точки линіи удара уравненія:

$$x=\alpha_1\left(\beta_1+\frac{1}{a^2}\right)x_0,\quad y=\alpha_1\left(\beta_1+\frac{1}{b^2}\right)y_0,\quad z=\alpha_1\left(\beta_1+\frac{1}{c^2}\right)z_0. \quad (113)$$

Если эта точка есть центръ удара, то координаты ея должны удовлетворять уравненію плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи перпендикулярно къ линіи удара, т. е. плоскости:

$$x_0x+y_0y+z_0z=0. \quad (114)$$

Подставляя сюда вмѣсто x, y, z ихъ значенія изъ (113), получимъ то соотношеніе, которому должно удовлетворять β_1 въ случаѣ центра удара:

$$\beta_1+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=0. \quad (115)$$

Если будемъ разсматривать одну и ту-же точку, то для того чтобы она была центромъ удара для линій удара, черезъ нее проходящихъ, необходимо, чтобы x_0, y_0, z_0 удовлетворяли ур. (114). Сдѣлавъ эту подстановку изъ ур. (113), получимъ:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}+\beta_1}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}+\beta_1}+\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}+\beta_1}=0. \quad (116)$$

При измѣненіи β_1 это уравненіе представитъ систему софокусныхъ конусовъ 2-го порядка, Такъ какъ черезъ каждую точку пространства проходитъ два такихъ конуса и они взаимно ортогональны, то получается такая теорема:

Каждая точка пространства есть центръ удара для двухъ линій удара; онѣ перпендикулярны между собою и къ прямой, соединяющей точку съ центромъ инерціи, и на-

правлены по нормалямъ къ софокуснымъ конусамъ (*116*), *проходящимъ черезъ точку* [1]).

Послѣднее свойство вытекаетъ изъ значеній для x_0, y_0, z_0, получающихся изъ ур. (113).

Обратимъ вниманіе на то, что такъ какъ центръ удара совпадаетъ съ основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ центра инерціи на линію удара, то какая-либо точка M будетъ служить центромъ для тѣхъ ударовъ, линіи дѣйствія которыхъ перпендикулярны къ OM. А такъ какъ мы знаемъ, что такихъ линій двѣ и онѣ параллельны осямъ сѣченія эллипсоида обратнаго эллипсоиду инерціи плоскостью перпендикулярной къ OM, то отсюда слѣдуетъ, что послѣдняя теорема заключается уже въ тѣхъ уравненіяхъ, которыя были выведены въ I главѣ для опредѣленія направленія осей какого-либо сѣченія: Нужно только въ ур. (42), (40) и (40_1) замѣнить a^2, b^2 и c^2 обратными ихъ значеніями и тогда получимъ конусъ (116) и направленія линій ударовъ, какъ онѣ даются ур. (113).

Какъ видно изъ ур. (61), и въ случаѣ когда система импульсивныхъ силъ вызываетъ вращеніе, ось импульсивнаго винта (C) параллельна оси момента прямой (Г), т. е. прямая (C) перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи и ось вращенія. Точка, въ которой эта плоскость пересѣкаетъ ось (C), называется *центромъ импульса*, а проэкція ея на ось вращенія — *центромъ вращенія*; въ этихъ точкахъ прямыя (C) и (Г) пересѣкаются ихъ кратчайшимъ разстояніемъ. Аналитически положеніе этихъ точекъ опредѣляется уже иными формулами, на которыхъ мы останавливаться не будемъ, такъ какъ при изслѣдованіи распредѣленія самихъ импульсивныхъ винтовъ и осей вращенія есть возможность, по крайней мѣрѣ въ тѣхъ простыхъ случаяхъ, которыя разсматриваются Beltrami, прійти инымъ путемъ къ распредѣленію этихъ центровъ

---

[1]) Beltrami, l. c. p. 347.

ГЛАВА III.

Комплексъ осей вращенія, соотвѣтствующихъ импульсивнымъ винтамъ даннаго параметра.

§ 14. Перейдемъ теперь къ болѣе общему случаю, когда на твердое тѣло дѣйствуетъ система импульсивныхъ силъ, приводящаяся къ импульсивному винту даннаго параметра. Силу удара мы опять предположимъ равной единицѣ, такъ какъ она вліяетъ только на величину угловой скорости, а не на положеніе оси вращенія.

Мы уже видѣли, что импульсивные винты даннаго параметра p вызываютъ вращенія вокругъ лучей комплекса:

$$a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0-p(\lambda_0^2+\mu_0^2+\nu_0^2)=0, \qquad (117)$$

и если $(\xi_0, \eta_0, \ldots.)$ координаты одного какого-либо луча (Γ) этого комплекса, то соотвѣтствующій импульсивный винтъ лежитъ на прямой (C), координаты которой $(x_0, y_0, \ldots.)$ опредѣляются по формуламъ (26), гдѣ нужно будетъ положить $\pi=0$:

$$\left.\begin{aligned} &x_0=\lambda_0, && y_0=\mu_0, && z_0=\nu_0,\\ &l_0=a^2\xi_0-p\lambda_0, && m_0=b^2\eta_0-p\mu_0, && n_0=c^2\zeta_0-p\nu_0. \end{aligned}\right\}(118)$$

Эти уравненія построены въ предположеніи, что за оси координатъ приняты главныя оси инерціи. Въ томъ-же случаѣ, когда за ось Oz взята какая-либо прямая, а за оси Ox и Oy

оси перпендикулярнаго къ ней сѣченія эллипсоида инерціи, вмѣсто предыдущихъ уравненій будемъ имѣть такія:

$$X_1\lambda_0\xi_0+X_2\mu_0\eta_0+P\nu_0\zeta_0+K_1(\xi_0\nu_0+\zeta_0\lambda_0)+K_2(\eta_0\nu_0+\zeta_0\mu_0)-$$
$$-p(\lambda_0^2+\mu_0^2+\nu_0^2)=0. \qquad (119)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_0=\lambda_0, & l_0=X_1\xi_0+K_1\zeta_0-p\lambda_0, \\ y_0=\mu_0, & m_0=X_2\eta_0+K_2\zeta_0-p\mu_0, \\ z_0=\nu_0, & n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0+P\zeta_0-p\nu_0. \end{array}\right\} \qquad (120)$$

Оси (Г), вращеніе вокругъ которыхъ происходитъ съ одинаковою угловою скоростью θ, по прежнему касательны къ сферѣ, радіусъ которой равенъ $\frac{1}{M_0\theta}$. Въ случаѣ осей вращенія, лежащихъ въ одной плоскости, сфера можетъ быть замѣнена, какъ въ §§ 10 и 12, окружностью пересѣченія ея съ плоскостью, и вопросъ о нахожденіи осей съ данной угловою скоростью приводится къ нахожденію общихъ касательныхъ къ окружности и той кривой, которую обертываютъ оси, лежащія въ плоскости. Въ случаѣ осей, выходящихъ изъ одной точки, можно разсматривать пересѣченіе ихъ конуса съ конусомъ касательныхъ изъ той-же точки къ сферѣ. Вмѣсто конусовъ можно разсматривать кривыя ихъ сѣченія съ діаметральной плоскостью, какъ это было сдѣлано въ § 11; общія точки этихъ кривыхъ будутъ соотвѣтствовать осямъ съ одною и тою-же угловою скоростью. Соотвѣтствующіе импульсивные винты могутъ быть найдены каждый разъ по общимъ правиламъ, какія будутъ даваться для перехода отъ оси вращенія къ соотвѣтствующему импульсивному винту. Мы не будемъ въ дальнѣйшемъ останавливаться на этихъ вопросахъ, замѣтимъ только, что импульсивные винты, вызывающіе вращенія съ одною и тою-же угловою скоростью, должны во первыхъ принадлежать къ комплексу (29_2),

во вторыхъ къ другому, уравненіе котораго получится, если исключить ξ_0, η_0, ζ_0 изъ ур. (66) и (118):

$$\left(\frac{l_0+px_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{m_0+py_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{n_0+pz_0}{c^2}\right)^2=M_0^2\theta^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2),$$

такъ что должны быть общими лучами этихъ двухъ комплексовъ втораго порядка.

§ 15. Подставляя въ ур. (117):

$$\xi_0=0,\quad \eta_0=0,\quad \nu_0=0, \tag{121}$$

мы видимъ, что оно не удовлетворяется, такъ что въ этомъ случаѣ нѣтъ осей вращенія, параллельныхъ какой-либо оси Oz инерціи. Сдѣлавъ тѣ-же положенія въ ур. (119), находимъ:

$$K_1\lambda_0\zeta_0+K_2\mu_0\zeta_0-p(\lambda_0^2+\mu_0^2)=0. \tag{122}$$

Обозначивъ черезъ (x_1y_1) координаты точки γ (фиг. 8), въ которой ось (Г) пересѣкаетъ плоскость xOy, будемъ имѣть:

$$\lambda_0=y_1\zeta_0,\quad \mu_0=-x_1\zeta_0,$$

такъ что по внесеніи этихъ значеній въ ур. (122), получимъ мѣсто точки γ:

$$p(x_1^2+y_1^2)-K_1y_1+K_2x_1=0. \tag{123}$$

Это есть окружность, касательная въ началѣ координатъ къ прямой OT и пересѣкающая оси Ox и Oy еще въ точкахъ A и B, отстоящихъ отъ начала на разстояніяхъ $-\frac{K_2}{p}$ и $\frac{K_1}{p}$; координаты центра C' круга:

$$\alpha'=-\frac{K_2}{2p},\quad \beta'=\frac{K_1}{2p}. \tag{124}$$

И такъ:

Параллельныя оси вращенія образуютъ прямой круглый цилиндръ, проходящій черезъ центръ инерціи. Вторая ось къ радіусу вектору эллипсоида инерціи, параллельному образующимъ цилиндра, нормальна къ цилиндру. Радіусъ цилиндра обратно пропорціоналенъ параметру импульсивнаго винта.

Сдѣлавъ положенія (121) въ ур. (120), получимъ для координатъ прямой (C):

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=\lambda_0, & y_0=\mu_0, & z_0=0, \\ l_0=K_1\zeta_0-p\lambda_0, & m_0=K_2\zeta_0-p\mu_0, & n_0=P\zeta_0. \end{array}\right\}(125)$$

Прямая (C) пересѣкаетъ плоскость $O\gamma\Gamma$ въ центрѣ c импульса; ось Oz пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ кратчайшее разстояніе $c\gamma_1$ между осью вращенія и импульсивнымъ винтомъ, раздѣляя его на двѣ части $q\gamma_1=\delta$ и $qc=\delta_1$, причемъ, какъ показываетъ послѣднее уравненіе (ср. § 10):

$$\delta\delta_1 = P. \tag{126}$$

Кратчайшее разстояніе между осью вращенія и импульсивнымъ винтомъ раздѣляется прямой, проходящей черезъ центръ инерціи и параллельной оси вращенія, на двѣ части, произведеніе которыхъ равно обратному значенію квадрата параллельнаго оси вращенія радіуса вектора эллипсоида инерціи [1].

На основаніи ур. (125) уравненія прямой (C) могутъ быть написаны въ формѣ:

$$\begin{gathered} px_0-zy_0-K_1\zeta_0=0, \\ zx_0+py_0-K_2\zeta_0=0, \\ yx_0-xy_0+P\zeta_0=0, \end{gathered}$$

[1] D. Turazza. Il moto dei systemi rigidi. Padova. 1868, p. 42.

такъ что, исключивъ отсюда x_0, y_0 и ζ_0, получимъ мѣсто прямыхъ (C):

$$Pz^2+K_1xz+K_2yz+K_1py-K_2px+Pp^2=0. \qquad (127)$$

Это гиперболическій параболоидъ, одна направляющая плоскость котораго параллельна плоскости, сопряженной направленію прямыхъ (Г), а другая перпендикулярна къ этимъ прямымъ.

Такъ какъ импульсивные винты параллельны плоскости xOy, то можно искать разстоянія z, на которыхъ они находятся отъ этой плоскости, въ зависимости отъ угловъ, образованныхъ ими съ осями Ox и Oy сѣченія. Изъ ур. (122) имѣемъ:

$$\zeta_0=\frac{p}{K_1x_0+K_2y_0};$$

далѣе, на основаніи перваго изъ уравненій прямой (C):

$$zy_0=px_0-\frac{K_1p}{K_1x_0+K_2y_0},$$

откуда получимъ:

$$z=p\,\frac{K_2x_0-K_1y_0}{K_1x_0+K_2y_0}, \qquad (128)$$

Имѣя-же въ виду, что K_1 и K_2 пропорціональны направляющимъ косинусамъ прямой OT, выраженіе для z можно написать такъ:

$$z=ptg.(C,OT). \qquad (129)$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ ур. (126) опредѣляетъ вполнѣ положеніе импульсивнаго винта.

Такъ какъ кратчайшее разстояніе $c\gamma_1$ между осями (C) и

(Г) параллельно плоскости xOy, то уравненіе проэкціи этой прямой на эту плоскость будетъ:

$$y:x=-x_0:y_0.$$

Соединивъ это уравненіе съ ур. (128), получимъ:

$$z=p\frac{K_2y+K_1x}{K_1y-K_2x}. \tag{130}$$

Такимъ образомъ прямыя $c\gamma_1$, лежатъ на гиперболическомъ параболоидѣ, направляющими плоскостями котораго служатъ: одна перпендикулярная къ прямымъ (Г), другая перпендикулярная къ прямой ON, составляющей съ направленіемъ (Г) пару осей эллипсоида инерціи. Пересѣченіе параболоида съ цилиндромъ (123) есть кривая 3-го порядка, представляющая геометрическое мѣсто центровъ вращеній всѣхъ параллельныхъ осей (Г), предполагая, что параметръ импульсивнаго винта сохраняетъ одно и то-же значеніе p. Для полученія поверхности, на которой лежатъ эти кривыя, мы должны исключить p изъ ур. (123) и (130); получимъ плоскость:

$$K_1y-K_2x=0 \tag{131}$$

и поверхность третьяго порядка[1]):

$$z=\frac{K_2y+K_1x}{x^2+y^2} \tag{132}$$

Но, какъ показываетъ ур. (123), въ плоскости (131), проходящей черезъ ось Oz и прямую OT, лежатъ только центры вращеній, соотвѣтствующіе $p=0$, т. е. перманентные центры, причемъ, какъ мы знаемъ, они образуютъ въ ней рав-

[1]) Ср. объ этомъ у Beltrami, l. c. p. 354.

ностороннюю гиперболу (§ 10); остается слѣдовательно раз-смотрѣть поверхность (132).

Повернувъ оси координатъ Ox и Oy на уголъ φ, полу-чимъ уравненіе поверхности въ формѣ:

$$z(x^2+y^2)=(K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi)x+(-K_1\sin\varphi+K_2\cos\varphi)y, \quad (133$$

откуда видно, что всякая плоскость $y=0$, проходящая черезъ ось Oz, пересѣкаетъ поверхность по равносторонней гиперболѣ представляющей мѣсто центровъ вращеній лежащихъ въ не осей (Г)[1]. Положивъ въ ур. (133):

$$tg\varphi=\frac{K_2}{K_1},\ \ y=0\,,$$

получимъ гиперболу, лежащую въ плоскости zOT:

$$zx=\sqrt{K_1^2+K_2^2}. \quad (134$$

Поверхность (133) пересѣкается плоскостями $z=h$ п кругамъ, уравненія которыхъ, предполагая, что прямая OT при-нята за ось Ox:

$$h(x^2+y^2)=x\sqrt{K_1^2+K_2^2}. \quad (135$$

Эти круги касаются плоскости ONz, и ихъ центры ле-жатъ въ плоскости OTz на равносторонней гиперболѣ :

$$hx=\frac{1}{2}\sqrt{K_1^2+K_2^2}\,,$$

параллельной гиперболѣ (134). Подставивъ въ ур. (13 опять z вмѣсто h и положивъ затѣмъ $z=mx$, убѣдимся, ч всякая плоскость, проходящая черезъ прямую ON, пересѣчет

[1]) D. Turazza, l. c. § 73. См. также у Beltrami, l. c. p. 357.

поверхность по эллипсамъ, проэктирующимся по кругамъ на плоскость xOy. Для полученія поверхности, на которой лежатъ центры импульсовъ, мы должны исключить p изъ ур. (127) и (130); получимъ двѣ плоскости:

$$z=0, \quad K_1x+K_2y+Pz=0,$$

служащія направляющими плоскостями параболоида (127). Соединяя послѣднее уравненіе съ ур. (127), получимъ новую плоскость:

$$K_1y-K_2x+Pp=0, \tag{136}$$

которая своимъ пересѣченіемъ съ послѣдней изъ направляющихъ плоскостей опредѣляетъ прямую—геометрическое мѣсто центровъ импульсовъ, соотвѣтствующихъ данному значенію параметра p [1]). Прямыя, соотвѣтствующія различнымъ p, пересѣкаютъ плоскость xOy въ точкахъ, лежащихъ на прямой (136), уравненіе которой получится также, если внести $z=0$ въ уравненіе (127) параболоида.

§ 16. Ур. (117) показываетъ, что въ главныхъ плоскостяхъ инерціи не существуетъ осей вращенія. Для изслѣдованія же распредѣленія этихъ осей въ какой-либо другой діаметральной плоскости, положимъ въ ур. (119):

$$\lambda_0=\mu_0=0, \quad \zeta_0=0; \tag{137}$$

тогда получимъ:

$$K_1\xi_0+K_2\eta_0-p=0. \tag{138}$$

Но уравненіе прямой, лежащей въ плоскости xOy, съ координатами ξ_0, η_0, $\nu_0=1$ есть:

$$y\xi_0-x\eta_0+1=0,$$

---

[1]) D. Turazza, l. c. §§ 71—73.

поэтому ур. (138) выражаетъ, что оси вращенія проходятъ черезъ точку F (фиг. 9), координаты которой:

$$x' = \frac{K_2}{p}, \quad y' = -\frac{K_1}{p}, \tag{139}$$

симметрично расположенной относительно центра инерціи съ той точкой N, въ которой прямая ON пересѣкаетъ цилиндръ осей перпендикулярныхъ къ діаметральной плоскости:

Въ каждой діаметральной плоскости, за исключеніемъ главныхъ плоскостей инерціи, есть пучокъ перваго порядка осей вращенія, вызываемыхъ импульсивными винтами даннаго параметра. Центръ пучка лежитъ на второй оси къ нормали къ плоскости, въ разстояніи отъ центра инерціи обратно пропорціональномъ параметру.

Для полученія соотвѣтствующихъ импульсивныхъ винтовъ внесемъ значенія (137) въ ур. (120); получимъ:

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=0, & y_0=0, & z_0=1, \\ l_0=X_1\xi_0, & m_0=X_2\eta_0, & n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0-p=0. \end{array}\right\} \tag{140}$$

Такъ какъ эти уравненія p не содержатъ, то изъ нихъ можно получить тѣ-же слѣдствія, какъ въ § 10. Импульсивный винтъ перпендикуляренъ къ діаметральной плоскости, пересѣкаетъ ее въ центрѣ импульса c, причемъ ось (Г) параллельна діаметру центральнаго эллипса (80), сопряженному направленію Oc. При переходѣ отъ одной оси (Г) къ другой ей параллельной, параметръ импульсивнаго винта будетъ мѣняться, а центръ c импульса будетъ перемѣщаться по прямой Oc, сопряженной въ центральномъ эллипсѣ направленію (Г). Если (Г) измѣнитъ свое направленіе и станетъ параллельной Oc, то прямая, занимаемая центрами импульсовъ, станетъ параллельной первоначальному направленію (Г)[1]. Продолживъ Oc до встрѣчи въ

[1]) D. Turazza, l. c. § 76.

точкѣ c' съ прямой (Г), получимъ между разстояніями Oc и Oc' соотношеніе (81), такъ что когда точка c' сдѣлается центромъ импульса, точка c будетъ лежать на соотвѣтствующей оси (Г)[2]). Обозначивъ по прежнему черезъ x_1 и y_1 координаты точки c, будемъ имѣть:

$$\xi_0 = \frac{y_1}{X_1}, \quad \eta_0 = -\frac{x_1}{X_2}.$$

На основаніи этихъ уравненій и ур. (139), мы можемъ написать ур. (138) въ видѣ:

$$\frac{x_1 x'}{X_2} + \frac{y_1 y'}{X_1} + 1 = 0.$$

Это уравненіе показываетъ, что центры импульсивныхъ винтовъ одинаковаго параметра лежатъ на полярѣ точкѣ N относительно центральнаго эллипса. Импульсивный винтъ пересѣкаетъ поляру въ той ея точкѣ, которая лежитъ на діамерѣ сопряженномъ направленію оси вращенія. Кромѣ того, такъ какъ уравненіе построено вполнѣ симметрично относительно относительно координатъ x_1, y_1 и x', y', то получается такая теорема [3]): *мѣсто центровъ удара, соотвѣтствующихъ осямъ вращенія, проходящимъ черезъ одну и ту-же точку, есть ось вращенія, соотвѣтствующая этой точкѣ какъ центру удара.*

§ 17. Мы видѣли, что въ томъ случаѣ когда $p=0$, т. е. въ случаѣ удара совершеннаго, перманентная ось характеризовалась тѣмъ, что она была параллельной оси сѣченія эллипсоида инерціи плоскостью момента вращенія. Такимъ образомъ каждая прямая Oz пересѣкалась подъ прямымъ угломъ двумя

---

[2]) D. Turazza, l. c. p. 43.

[3]) Эта теорема для случая перманентныхъ осей, лежащихъ въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи, доказана Poinsot: Sur la percussion des corps. Liouville, Journal. T. II, 1857, p. 325.

системами осей (Г), соотвѣтственно параллельными осямъ Ox и Oy сѣченія нормальнаго къ Oz. Посмотримъ, какъ расположены въ болѣе общемъ, разсматриваемомъ теперь случаѣ, оси вращенія (Г), перпендикулярныя къ какой-либо прямой Oz, проходящей черезъ центръ инерціи. Полагая для этой цѣли въ ур. (119):

$$\zeta_0=\nu_0=0, \tag{141}$$

получимъ:

$$X_1\lambda_0\xi_0+X_2\mu_0\eta_0-p(\lambda_0^2+\mu_0^2)=0. \tag{142}$$

Обозначимъ черезъ z разстояніе $O\gamma$ (фиг. 10) оси вращенія отъ центра инерціи, а черезъ α уголъ, образованный ею съ осью Ox; тогда:

$$\xi_0=\frac{cos\alpha}{z},\quad \eta_0=\frac{sin\alpha}{z}, \tag{143}$$

$$\lambda_0=-z\eta_0=-sin\alpha,\quad \mu_0=z\xi_0=cos\alpha.$$

Подставивъ эти значенія въ ур. (142), получимъ:

$$z=-\frac{(X_1-X_2)sin2\alpha}{2p}; \tag{144}$$

или, если x и y текущія координаты оси (Г), то:

$$tg\alpha=y:x,$$

и

$$z=-\frac{X_1-X_2}{p}\,\frac{xy}{x^2+y^2}. \tag{145}$$

Это цилиндроидъ [1]) съ главными параметрами $\frac{X_1}{p}$, $\frac{X_2}{p}$, построенными на осяхъ сѣченія:

Ось вращенія, вызываемаго импульсивнымъ винтомъ даннаго параметра, есть образующая цилиндроида, главныя оси

---

[1]) Довольно подробное описаніе цилиндроида и его свойствъ можно найти напр., у Schell'я: «Theorie der Bewegung und der Kräfte». Leipzig. 1880. II, Cap. X.

котораго суть оси сѣченія эллипсоида инерціи плоскостью момента вращенія, а главные параметры прямо пропорціональны осямъ сѣченія и обратно пропорціональны параметру импульсивнаго винта.

Наибольшее значеніе z соотвѣтствуетъ направленію $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и есть:

$$\rho = \pm \frac{X_2 - X_1}{2p}. \qquad (146)$$

Если на каждомъ радіусѣ векторѣ откладывать по обѣ стороны отъ центра инерціи абсолютное значеніе разстоянія ρ, то получится поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что за ея предѣлами нѣтъ осей вращенія, въ томъ смыслѣ, что радіусы векторы поверхности суть наибольшія разстоянія, на которыхъ, считая отъ центра инерціи, могутъ существовать такія оси. Мы получимъ уравненіе этой поверхности, отнесенное къ главнымъ осямъ инерціи, если въ ур. (146) замѣнимъ выраженіе $(X_2 - X_1)$ его значеніемъ изъ (54) и внесемъ затѣмъ $\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}$ вмѣсто α, β и γ; тогда получимъ поверхность шестаго порядка:

$$4p^2\rho^6 = A_1^2x^4 + B_1^2y^4 + C_1^2z^4 - 2A_1B_1x^2y^2 - 2B_1C_1y^2z^2 - 2C_1A_1z^2x^2.$$

Импульсивный винтъ (C) пересѣкаетъ плоскость $O\gamma\Gamma$ въ точкѣ c, центрѣ импульса, и кратчайшее разстояніе $c\gamma_1$, раздѣляется плоскостью xOy въ точкѣ q на двѣ части $q\gamma_1 = z$ и $qc = z_1$, произведеніе которыхъ равно обратному значенію квадрата направленнаго по Oq радіуса вектора эллипса сѣченія, т. е.:

$$zz_1 = X_1 \cos^2\alpha + X_2 \sin^2\alpha. \qquad (147)$$

Такъ какъ кратчайшее разстояніе cP между осью (C) и осью Oz параллельно (Γ), то, внеся въ ур. (147) вмѣсто z

его значеніе изъ уравненія цилиндроида, получимъ мѣсто прямыхъ cP:

$$z_1 = \frac{p}{X_2 - X_1} \frac{X_1 x_1^2 + X_2 y_1^2}{xy}, \qquad (148)$$

т. е. ту поверхность, на которой должны находиться центры импульсовъ. Такъ какъ съ другой стороны они должны находиться на цилиндрической поверхности, описываемой кратчайшими разстояніями $c\gamma_1$, то найдемъ основаніе цилиндра—мѣсто точки q. Радіусъ векторъ $Oq = \rho_1$ очевидно равенъ моменту прямой (C) относительно оси Oz, а вмѣстѣ съ тѣмъ тотъ-же моментъ дается послѣднимъ изъ уравненій (120), гдѣ вмѣсто ξ_0, η_0, ... нужно будетъ внести ихъ значенія изъ (141) и (143); такимъ образомъ получимъ:

$$\rho_1 = \frac{K_1 cos a + K_2 Sin a}{z},$$

или, замѣнивъ z его значеніемъ изъ (144), получимъ кривую, описываемую точкою q:

$$(X_1 - X_2)xy + p(K_1 x + K_2 y) = 0. \qquad (149)$$

Это равносторонняя гипербола, ассимптоты которой параллельны осямъ сѣченія. Пересѣченіе прямаго цилиндра, имѣющаго эту кривую своимъ основаніемъ, и поверхности (148) есть кривая—мѣсто центровъ импульсовъ, а пересѣченіе того-же цилиндра съ цилиндроидомъ (145) даетъ кривую, занимаемую центрами вращеній. Эти кривыя будутъ видоизмѣняться съ измѣненіемъ параметра p, но всегда будутъ лежать на поверхностяхъ, уравненія которыхъ получаются исключеніемъ p съ одной стороны между ур. (148) и (149), съ другой—между ур. (145) и (149). Такимъ образомъ получимъ для поверх-

ности центровъ ударовъ конусъ втораго порядка, съ вершиной въ центрѣ инерціи:

$$X_1x^2+X_2y^2-K_1xz-K_2yz=0,$$

а для мѣста центровъ вращеній уже извѣстную намъ поверхность третьяго порядка:

$$z=\frac{K_1x+K_2y}{x^2+y^2}.$$

§ 18. Обратимся теперь къ изслѣдованію конуса осей вращенія, проходящихъ черезъ какую-либо точку M пространства. Принявъ OM за ось Oz въ ур. (119) и (120), можно будетъ положить:

$$OM=R,\ \lambda_0=-R\eta_0,\ \mu_0=R\xi_0,\ \nu_0=0. \qquad (150)$$

Если перенесемъ оси координатъ параллельно самимъ себѣ въ точку M, то вмѣсто ξ_0, η_0, ζ_0 можно будетъ писать текущія координаты x, y, z образующей конуса. Такимъ образомъ ур. (119) преобразуется въ такое:

$$pR(x^2+y^2)+(X_1-X_2)xy+K_1yz-K_2xz=0. \qquad (151)$$

Этотъ конусъ обращается въ конусъ перманентныхъ осей при $p=0$ и въ цилиндръ параллельныхъ осей при $R=\infty$, причемъ для полученія уравненія цилиндра нужно преобразовать предварительно уравненіе конуса къ центру инерціи. Положивъ въ ур. (151) $z=-R$, получимъ кривую сѣченія конуса плоскостью xOy:

$$pR(x^2+y^2)+(X_1-X_2)xy-K_1Ry+K_2Rx=0. \qquad (152)$$

Кривая при всѣхъ значеніяхъ p и R касается въ центрѣ инерціи прямой OT; ассимптоты ея параллельны двумъ образующимъ цилиндроида, проходящимъ черезъ точку M. Пока эти

образующія дѣйствительны, кривая—гипербола, въ крайнихъ точкахъ цилиндроида двѣ образующія сливаются въ одну, и кривая станетъ параболой, наконецъ, когда точка M выходитъ за предѣлы цилиндроида, кривая сѣченія есть эллипсъ. Какъ видно изъ ея уравненія, кривая при всякомъ значеніи R проходитъ черезъ точки $A\left(-\frac{K_2}{p}, 0\right)$ и $B\left(0, \frac{K_1}{p}\right)$ (фиг. 8); лежащія на осяхъ сѣченія, тѣ точки, въ которыхъ эти оси пересѣкаютъ цилиндръ осей параллельныхъ OM. Координаты центра C'' кривой суть:

$$\alpha''=-R\frac{2pRK_2+(X_1-X_2)K_1}{4p^2R^2-(X_1-X_2)^2},$$

$$\beta''=R\frac{2pRK_1+(X_1-X_2)K_2}{4p^2R^2-(X_1-X_2)^2},$$

Если обозначить черезъ C' и C_0 центры круга и гиперболы, получающихся въ сѣченіи, если положить одинъ разъ $R=\infty$, другой разъ $p=0$, то точка C'' раздѣляетъ разстояніе $C'C_0$ внѣшне въ отношеніи $\left(\frac{X_1-X_2}{2}\right)^2 : p^2R^2$.

Каждому значенію параметра p соотвѣтствуетъ на прямой OM такая точка, что соотвѣтствующій конусъ осей вращенія обращается въ двѣ плоскости. Розыскивая условіе этого обращенія изъ ур. (151), получимъ:

$$pR=-\frac{(X_1-X_2)K_1K_2}{K_1^2+K_2^2}. \tag{153}$$

Геометрическое мѣсто такихъ точекъ составитъ поверхность, уравненіе которой, по отношенію къ главнымъ осямъ инерціи, легко получимъ, если правую часть ур. (153) преобразуемъ на основаніи ур. (50), (51) и (53):

$$p(A_1^2y^2z^2+B_1^2z^2x^2+C_1^2x^2y^2)+A_1B_1C_1xyz=0. \tag{154}$$

Это такъ называемая поверхность особенностей комплекса

втораго порядка осей вращенія. Она обладаетъ по отношенію къ послѣднему не только тѣмъ свойствомъ, что для ея точекъ конусы втораго порядка осей вращенія преобразуются въ двѣ плоскости, но также, какъ будетъ это видно далѣе, и тѣмъ, что кривыя втораго порядка, обертываемыя осями, лежащими въ какой-либо плоскости, для плоскостей касательныхъ къ поверхности преобразуются въ двѣ точки. Мы могли-бы ее получить, отыскивая мѣсто точекъ F (§ 16), центровъ пучковъ перваго порядка, лежащихъ въ діаметральныхъ плоскостяхъ. Что касается до формы поверхности, то простое изслѣдованіе показываетъ, что главныя оси инерціи служатъ для нея двойными линіями, и плоскости, проходящія черезъ одну изъ нихъ, напр. Oz, пересѣкаютъ поверхность по эллипсамъ. Если предположимъ, что $p>0$, и что плоскость образуетъ съ осью Ox уголъ $\frac{\pi}{2}+\theta$, то если θ измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, центръ эллипса лежитъ на положительной оси Oz, и ось его, лежащая на этой прямой, сначала возрастаетъ отъ нуля до $-\frac{C_1}{2p}$, причемъ $tg\theta=-\frac{A_1}{B_1}$, а затѣмъ убываетъ опять до нуля; вторая-же ось отъ значенія $\frac{B_1}{p}$ убываетъ до значенія $-\frac{A_1}{p}$. При измѣненіи θ отъ $\frac{\pi}{2}$ до π, эллипсы располагаются ниже плоскости xOy. Подобное-же произойдетъ, если будемъ проводить плоскости черезъ оси Oy и Ox. Замѣтимъ, что координаты какой-либо точки поверхности могутъ быть представлены въ видѣ:

$$x=-\frac{A_1\beta\gamma}{p},\quad y=-\frac{B_1\gamma\alpha}{p},\quad z=-\frac{C_1\alpha\beta}{p}, \qquad (155)$$

гдѣ α, β, γ параметры, связанныя уравненіемъ:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Подставивъ значеніе (153) въ уравненіе (151) конуса, находимъ тѣ двѣ плоскости, въ которыя онъ обращается:

$$K_1y-K_2x=0, \tag{156}$$

$$K_1x-K_2y+\frac{K_1^2+K_2^2}{X_1-X_2}z=0\,, \tag{157}$$

причемъ начало координатъ въ точкѣ M. Изъ нихъ первая проходитъ черезъ прямыя OM и OT и по своему положенію не зависитъ отъ того, гдѣ на прямой OM взята точка M, вторая-же проходитъ черезъ M и тѣ точки A и B, въ которыхъ цилиндръ осей, соотвѣтствующій разсматриваемому значенію параметра p, пересѣкаетъ оси Ox и Oy. Дѣйствительно, въ силу равенства (153), ур. (157) удовлетворяется, если положить (§ 15):

$$x=-\frac{K_2}{p},\ y=0,\ z=-R,\ \text{или}\ x=0,\ y=\frac{K_1}{p},\ z=-R;$$

при перемѣщеніи точки M вдоль OM, эта плоскость остается себѣ параллельной.

Такъ какъ $z_0=\nu_0=0$, то импульсивные винты, вызывающіе вращенія вокругъ производящихъ конуса, параллельны плоскости xOy. Для полученія поверхности, геометрическаго мѣста этихъ винтовъ, составимъ уравненіе оси одного изъ нихъ, воспользовавшись для этой цѣли ур. (120), (150) и (4):

$$\left.\begin{aligned}(X_1+Rz)\xi_0+pR\eta_0+K_1\zeta_0=0,\\ -pR\xi_0+(X_2+Rz)\eta_0+K_2\zeta_0=0,\\ (K_1-Rx)\xi_0+(K_2-Ry)\eta_0+P\zeta_0=0,\end{aligned}\right\} \tag{158}$$

и исключимъ отсюда перемѣнныя ξ_0, η_0, ζ_0; тогда получимъ:

$$\begin{aligned}(K_1x+K_2y+Pz)R^2z+(P(X_1+X_2)-(K_1^2+K_2^2))Rz+\\ +(K_2X_1+pRK_1)Ry+(K_1X_2-pRK_2)Rx+\\ +PX_1X_2-X_1K_2^2-X_2K_1^2+Pp^2R^2=0.\end{aligned} \tag{159}$$

Это гиперболическій параболоидъ, одна направляющая плоскость котораго параллельна плоскости xOy, а другая— плоскости сопряженной направленію Oz. Для опредѣленія разстоянія, на которомъ импульсивный винтъ даннаго направленія находится отъ плоскости xOy, опредѣлимъ ζ_0 изъ уравненія комплекса:

$$\zeta_0 = \frac{Rp(x_0^2+y_0^2)-(X_1-X_2)x_0y_0}{R(K_1x_0+K_2y_0)},$$

и внеся это значеніе въ первое изъ ур. (158), опредѣлимъ:

$$z = \frac{pR(K_2x_0-K_1y_0)-(X_2K_1x_0+X_1K_2y_0)}{R(K_1x_0+K_2y_0)}.$$

Обозначимъ черезъ z' то значеніе, которое принимаетъ z, если положимъ:

$$x_0 : y_0 = K_1 : K_2,$$

другими словами черезъ z' обозначается разстояніе отъ плоскости xOy образующей параболоида, параллельной прямой OT:

$$z' = -\frac{X_1K_2^2+X_2K_1^2}{R(K_1^2+K_2^2)}; \tag{160}$$

тогда:

$$z-z' = \left(p+\frac{(X_1-X_2)K_1K_2}{R(K_1^2+K_2^2)}\right)\frac{K_2x_0-K_1y_0}{K_1x_0+K_2y_0}, \tag{161}$$

или, какъ въ § 15:

$$z-z' = \left(p+\frac{(X_1-X_2)K_1K_2}{R(K_1^2+K_2^2)}\right)tg(C,OT). \tag{162}$$

Если вспомнимъ, что импульсивный винтъ пересѣкаетъ плоскость, проходящую черезъ центръ инерціи и ось (Г), въ такой точкѣ c (центрѣ импульса), что прямая Oc есть діаметръ сѣченія, сопряженный направленію (Г), то уравненіемъ (162) положеніе импульсивнаго винта вполнѣ опредѣляется.

Въ частномъ случаѣ, когда между p и R существуетъ соотношеніе (153), конусъ осей преобразуется въ двѣ плоскости, а уравненіе, опредѣлявшее z, распадается на два:

$$K_1x_0+K_2y_0=0, \tag{163}$$

$$z=z'.$$

Изъ нихъ первое даетъ направленіе ON для тѣхъ импульсивныхъ винтовъ, которые вызываютъ вращенія вокругъ осей, лежащихъ въ плоскости MOT (156) (ср. § 16), слѣдовательно второе опредѣляетъ плоскость, въ которой лежатъ импульсивные винты, вызывающіе вращенія вокругъ осей, лежащихъ въ плоскости MAB (157). Для полученія мѣста первой группы винтовъ можно исключить ζ_0 изъ перваго и третьяго изъ ур. (158), затѣмъ воспользоваться соотношеніемъ между ξ_0 и η_0, вытекающимъ изъ ур. (150) и (163):

$$\xi_0:\eta_0=K_1:K_2,$$

и наконецъ внести вмѣсто p его значеніе изъ ур. (153); тогда получимъ уравненіе:

$$K_1x+K_2y+Pz+\frac{P}{R}\frac{X_1K_1^2+X_2K_2^2}{K_1^2+K_2^2}-K_1^2-K_2^2=0; \tag{164}$$

получили плоскость, параллельную плоскости сопряженной направленію OM въ эллипсоидѣ, результатъ, который нужно было предвидѣть на основаніи изложеннаго въ § 16.

Для опредѣленія положенія импульсивныхъ винтовъ въ плоскости $z=z'$, замѣтимъ, что для разсматриваемаго значенія p мы будемъ имѣть такое значеніе для ζ_0:

$$\zeta_0=-\frac{X_1-X_2}{R(K_1^2+K_2^2)}(K_2x_0+K_1y_0).$$

Воспользовавшись-же ур. (150) и подставляя въ третье изъ уравненій (158) прямой (*C*), будемъ имѣть:

$$x\xi_0+y\eta_0=\frac{K_1}{R}\left(1-P\frac{X_1-X_2}{K_1^2+K_2^2}\right)\xi_0+\frac{K_2}{R}\left(1+P\frac{X_1-X_2}{K_1^2+K_2^2}\right)\eta_0,$$

откуда видно, что импульсивные винты, лежащіе въ плоскости $z=z'$, проходятъ черезъ точку M':

$$x'=\frac{K_1^2+K_2^2-P(X_1-X_2)}{K_1^2+K_2^2}\frac{K_1}{R},\quad y'=\frac{K_1^2+K_2^2+P(X_1-X_2)}{K_1^2+K_2^2}\frac{K_2}{R},\quad z=z',\tag{165}$$

при перемѣщеніи точки M вдоль OM, точка M' перемѣщается по другой прямой OM', проходящей черезъ центръ инерціи.

Такимъ образомъ, черезъ каждую точку M прямой OM проходитъ пучокъ перваго порядка осей (Г), лежащій въ плоскости MOT; соотвѣтствующіе импульсивные винты перпендикулярны къ этой плоскости и лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ (164). Точки M прямой OM служатъ центрами и другихъ пучковъ перваго порядка осей (Г), лежащихъ въ параллельныхъ плоскостяхъ MAB; соотвѣтствующіе имъ винты (*C*) лежатъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ OM, образуя пучки перваго порядка, центры M' которыхъ лежатъ на другой прямой OM'. Въ этомъ смыслѣ каждой прямой OM въ системѣ осей (Г) соотвѣтствуетъ прямая OM' въ системѣ винтовъ (*C*), и каждой точкѣ первой прямой — точка на второй. Изъ ур. (165) видно, что при данномъ направленіи OM:

$$OM.OM'=const.$$

§ 19. Посмотримъ теперь, каково геометрическое мѣсто осей вращенія, лежащихъ въ одной плоскости (m). Принявъ оси сѣченія, параллельнаго плоскости (m), за оси Ox и Oy, а нормальный къ нему радіусъ векторъ за ось Oz, преобразуемъ

уравненіе комплекса къ осевымъ координатамъ по правилу, указанному въ § 1. Получимъ:

$$X_1p_0t_0+X_2q_0u_0+Pr_0v_0+K_1(p_0v_0+r_0t_0)+K_2(q_0v_0+r_0u_0)-$$

$$-p(t_0^2+u_0^2+v_0^2)=0. \qquad (166)$$

Для полученія обертки въ какой-либо плоскости мы должны внести въ это уравненіе вмѣсто координатъ ихъ значенія по формуламъ (7) и (8), подразумѣвая подъ t_1, u_1 и v_1 координаты разсматриваемой плоскости. Обозначивъ черезъ R ординату z точки M пересѣченія нашей плоскости съ осью Oz, мы будемъ имѣть уравненіе плоскости въ видѣ:

$$-\frac{z}{R}+1=0$$

и нужно будетъ положить:

$$t_1=0,\ u_1=0,\ v_1=-\frac{1}{R}.$$

Перемѣнныя t, u, v означаютъ координаты перемѣнной плоскости, пересѣкающей данную по прямымъ (Г). Если среди безчисленнаго числа плоскостей, проходящихъ черезъ каждую изъ прямыхъ (Г), будемъ выбирать только такія, которыя перпендикулярны къ плоскости (m), или къ ей параллельной—xOy, то нужно положить $v=0$, и тогда выраженія (7) и (8) будутъ пропорціональны такимъ:

$$p_0=u,\quad q_0=-t,\quad r_0=0,$$

$$t_0=Rt,\quad u_0=Ru,\quad v_0=1.$$

Подставивъ эти значенія въ ур. (166), получимъ въ линейныхъ координатахъ уравненіе проэкціи искомой обертки

или уравненіе ея самой, если перенесемъ оси координатъ параллельно имъ самимъ въ точку M:

$$pR^2(t^2+u^2)-(X_1-X_2)Rtu+K_2t-K_1u+p=0,$$

или въ координатахъ точки:

$$(K_1^2-4p^2R^2)x^2+(K_2^2-4p^2R^2)y^2+2\Big(K_1K_2-2pR(X_1-X_2)\Big)xy+$$
$$2R\Big(-K_1(X_1-X_2)+2pRK_2\Big)x+2R\Big(K_2(X_1-X_2)-2pRK_1\Big)y+$$
$$+\Big((X_1-X_2)^2-4p^2R^2\Big)R^2=0. \qquad (167)$$

Во всѣхъ случаяхъ, когда p отлично отъ нуля, это кривая центральная и координаты центра:

$$x'=\frac{K_2}{2p}, \quad y'=-\frac{K_1}{2p}, \quad z'=R;$$

при перемѣщеніи плоскости параллельно самой себѣ, центръ перемѣщается по прямой, перпендикулярной къ плоскости сѣченія и пересѣкающей эту плоскость въ точкѣ, раздѣляющей пополамъ разстояніе OF центра инерціи отъ центра пучка осей вращенія, лежащихъ въ діаметральной плоскости. При измѣненіи параметра, центръ опишетъ прямую параллельную прямой ON.

Уравненіе обертки, отнесенное къ центру, будетъ:

$$(K_2^2-4p^2R^2)t^2-2\Big(K_1K_2-2pR(X_1-X_2)\Big)tu+(K_1^2-4p^2R^2)u^2=4p^2.$$

Она обращается въ двѣ точки, если между p и R существуетъ соотношеніе:

$$(K_1^2-4p^2R^2)(K_2^2-4p^2R^2)=\Big(K_1K_2-2pR(X_1-X_2)\Big)^2; \quad (168)$$

причемъ координаты этихъ точекъ относительно центра кривой суть:

$$x_1=\frac{\sqrt{K_2^2-4p^2R^2}}{2p},\quad y_1=-\frac{\sqrt{K_1^2-4p^2R^2}}{2p},$$

$$x_2=-\frac{\sqrt{K_2^2-4p^2R^2}}{2p},\quad y_2=\frac{\sqrt{K_1^2-4p^2R^2}}{2p},$$

гдѣ подъ p нужно подразумѣвать одинъ изъ четырехъ корней ур. (168).

Обозначимъ по прежнему черезъ $V(p)$ функцію (86), а черезъ p_k одинъ изъ трехъ дѣйствительныхъ корней ур. (85), представляющій обратное значеніе квадрата длины одной изъ полуосей конуса (82). Мы можемъ представить ур. (168) въ видѣ:

$$D=-2pRV(2pR)=0,$$

гдѣ черезъ D обозначенъ дискриминантъ ур. (167).

Если отбросить корень $p=0$, то остальные три корня имѣютъ видъ:

$$p=\frac{p_k}{2R},$$

т. е. значенія параметра, обращающія обертку въ двѣ точки, обратно пропорціональны длинамъ полуосей конуса осей, соотвѣтствующаго плоскости сѣченія. Если-же будемъ считать p даннымъ и искать тѣ значенія R, при которыхъ обертка обращается въ двѣ точки, то окажется, что это будетъ имѣть мѣсто въ четырехъ точкахъ O, M_1, M_2, M_3 прямой OM, причемъ, такъ какъ изъ корней p_k только одинъ отрицателенъ (87), то при $p>0$, одна изъ точекъ, напр. M_3, лежитъ ниже плоскости xOy. Выше точки M_2 и въ промежуткѣ M_1O, дискриминантъ отрицателенъ, поэтому кривая будетъ эллипсомъ, въ промежуткѣ M_2M_1 — гиперболой, подъ плоскостью xOy — опять гиперболой, такъ какъ R мѣняетъ знакъ, ниже M_3

—опять эллипсомъ. Если въ ур. (88) внести $2pR$ вмѣсто p и $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$, $\frac{z}{R}$ вмѣсто α, β, γ, то получимъ поверхность шестаго порядка:

$$4p^3R^6 - pR^2(A_1^2x^2 + B_1^2y^2 + C_1^2z^2) + A_1B_1C_1xyz = 0, \quad (169)$$

обладающую тѣмъ свойствомъ, что кривыя, обертываемыя осями вращеній, лежащими въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ ея точки и перпендикулярныхъ къ соотвѣтствующимъ радіусамъ векторамъ, обращаются въ двѣ точки. Докажемъ, что сами плоскости обертываютъ при этомъ поверхность особенностей комплекса. Для этой цѣли найдемъ выраженія для координатъ x_1, y_1, z_1 основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ центра инерціи на касательную плоскость къ поверхности (154). Обозначимъ черезъ f лѣвую часть ур. (154), черезъ δ' длину вышеупомянутаго перпендикуляра, а черезъ x, y и z координаты точки касанія, тогда легко найдемъ:

$$\delta' = -\frac{A_1B_1C_1xyz}{\Delta},$$

гдѣ:

$$\Delta^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2.$$

Если-же вмѣсто координатъ x, y и z введемъ ихъ выраженія (155), то получимъ:

$$\delta' = \frac{A_1^2B_1^2C_1^2\alpha^2\beta^2\gamma^2}{p^3\Delta},$$

и напр.:

$$\cos(\delta' x) = \frac{(2\alpha^2-1)p\delta'}{A_1\beta\gamma},$$

такъ что:

$$x_1 = \frac{(2\alpha^2-1)p\delta'^2}{A_1\beta\gamma}, \quad y_1 = \frac{(2\beta^2-1)p\delta'^2}{B_1\gamma\alpha}, \quad z_1 = \frac{(2\gamma^2-1)p\delta'^2}{C_1\alpha\beta}.$$

Имѣя-же въ виду съ одной стороны, что $R=\delta'$, съ другой —соотношеніе между косинусами α, β и γ, подстановкой убѣдимся, что эти значенія координатъ ур. (169) удовлетворяютъ.

Для полученія импульсивныхъ винтовъ, вызывающихъ вращенія вокругъ касательныхъ къ кривой, лежащей въ плоскости (m), мы должны имѣть въ виду, что въ данномъ случаѣ:

$$\zeta_0=0,\ \lambda_0=x_0=-R\eta_0,\ \mu_0=y_0=R\xi_0, \tag{170}$$

и что слѣдовательно координаты l_0, m_0 и n_0 по ур. (120) могутъ быть представлены въ видѣ:

$$l_0=X_1\xi_0+pR\eta_0,\ m_0=X_2\eta_0-pR\xi_0,\ n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0-pz_0;$$

такъ что уравненія прямой (C) будутъ:

$$\left.\begin{aligned}(Rz+X_1)\xi_0+pR\eta_0-yz_0&=0,\\ -pR\xi_0+(Rz+X_2)\eta_0+xz_0&=0,\\ (Rx-K_1)\xi_0+(Ry-K_2)\eta_0+pz_0&=0.\end{aligned}\right\} \tag{171}$$

Для полученія поверхности остается исключить ξ_0, η_0 и z_0; получимъ гиперболоидъ:

$$\begin{gathered}pR^2(x^2+y^2+z^2)+K_2Rxz-(X_1-X_2)Rxy-K_1Ryz+\\ +(K_2X_1-pK_1R)x-(K_1X_2+pK_2R)y+pR(X_1+X_2)z+\\ +p(p^2R^2+X_1X_2)=0.\end{gathered}$$

Всѣ гиперболоиды, соотвѣтствующіе различнымъ p, имѣютъ одинъ и тотъ-же центръ, координаты котораго:

$$x_1=\frac{K_1}{2R},\ y_1=\frac{K_2}{2R},\ z_1=-\frac{X_1+X_2}{2R}.$$

Уравненіе поверхности, отнесенное къ центру, будетъ:

$$2pR(x^2+y^2+z^2)+2K_2xz-2(X_1-X_2)xy-2K_1yz+$$
$$+\frac{1}{4R^2}V(2pR)=0, \qquad (172)$$

гдѣ V есть функція вида (86).

Для отысканія направленія и длинъ полуосей поверхности, составимъ извѣстную систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned}(2pR-S)\lambda-(X_1-X_2)\mu+K_2\nu&=0,\\ -(X_1-X_2)\lambda+(2pR-S)\mu-K_1\nu&=0,\\ K_2\lambda-K_1\mu+(2pR-S)\nu&=0,\\ V(2pR-S)&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (173)$$

причемъ послѣднее уравненіе есть результатъ исключенія косинусовъ λ, μ и ν изъ первыхъ трехъ. Такъ какъ извѣстный членъ его есть $V(2pR)$, то, обозначивъ черезъ S_1, S_2, S_3 его корни, будемъ имѣть:

$$S_1S_2S_3=V(2pR);$$

съ другой стороны, если сравнить систему ур. (173) съ подобной-же системой § 11, то можно написать вообще:

$$2pR-S_k=p_k, \qquad k=1,\ 2,\ 3.$$

поэтому уравненіе гиперболоида, отнесенное къ центру и къ осямъ, должно имѣть такой видъ:

$$(p_1-2pR)x^2+(p_2-2pR)y^2+(p_3-2pR)z^2+$$
$$+\frac{1}{4R^2}(p_1-2pR)(p_2-2pR)(p_3-2pR)=0.$$

Уравненіе поверхности, представленное въ такой формѣ, даетъ понятіе о томъ, какъ она будетъ видоизмѣняться при отдѣльномъ измѣненіи величинъ p, R и произведенія pR.

Ассимптотическій конусъ поверхности, какъ видно изъ ур. (172), не равенъ конусу (151) осей вращенія. Но если составимъ уравненіе конуса нормальнаго къ ассимптотическому, то легко убѣдимся, что сѣченіе его плоскостью, параллельной плоскости сѣченія и отстоящей отъ вершины конуса на разстояніи R, есть кривая (167), обертываемая осями вращенія, лежащими въ плоскости, отстоящей отъ плоскости сѣченія на такомъ-же разстояніи R.

Такъ какъ ось вращенія (Г), лежащая въ плоскости перпендикулярной къ оси Oz (фиг. 1), одновременно перпендикулярна и къ оси Oz и къ оси соотвѣтствующаго импульсивнаго винта (C), то она параллельна кратчайшему разстоянію PQ между этими двумя прямыми. Для полнаго опредѣленія положенія прямой (C), соотвѣтствующей данной оси вращенія (Г), достаточно поэтому знать длину $PQ=\Delta$ вышеупомянутаго кратчайшаго разстоянія, а также ординату $OP=z_1$ точки пересѣченія послѣдняго съ осью Oz. Обозначимъ черезъ α уголъ, образованный осью (Г) съ осью Ox, тогда координаты точки Q будутъ $\Delta cos\alpha$, $\Delta sin\alpha$ и $-z_1$; имѣя-же въ виду ур. (70), и подставляя координаты точки Q въ первыя два изъ ур. (171), получимъ:

$$(X_1-Rz_1)cos\alpha=(\Delta\delta z_0-pR)sin\alpha,$$

$$(X_2-Rz_1)sin\alpha=(pR-\Delta\delta z_0)cos\alpha.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій получаемъ:

$$Rz_1=X_1cos^2\alpha+X_2sin^2\alpha, \tag{174}$$

$$\Delta\delta z_0-pR=\left(X_1-X_2\right)sin\alpha cos\alpha. \tag{175}$$

Такъ какъ правая часть перваго изъ этихъ уравненій представляетъ обратное значеніе квадрата параллельнаго (Г) радіуса вектора эллипсоида, а за прямую Oz мы можемъ взять

любую изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ O и лежащихъ въ плоскости перпендикулярной къ (Γ), то: кратчайшія разстоянія соотвѣтствующихъ прямыхъ (C) и (Γ) отъ какой-либо прямой, проходящей черезъ центръ инерціи и лежащей въ плоскости перпендикулярной къ (Γ), пересѣкаютъ эту третью прямую въ двухъ точкахъ, произведеніе разстояній которыхъ отъ центра инерціи равно обратному значенію квадрата параллельнаго (Γ) радіуса вектора эллипсоида. Если прямую Oz взять параллельно кратчайшему разстоянію прямыхъ (C) и (Γ), то ур. (174) выразитъ теорему (126) Turazza; съ другой стороны, какъ видно изъ фиг. 1, оно есть прямое слѣдствіе послѣдней. Въ самомъ дѣлѣ изъ подобныхъ треугольниковъ $pq\gamma_1$ и Qcq, гдѣ $cq = \delta_1$, $q\gamma_1 = \delta$, $pq = R$, $Qq = z_1$, имѣемъ:

$$\delta : R = z_1 : \delta_1,$$

откуда:

$$\delta\delta_1 = Rz_1.$$

Что касается до ур. (175), то въ немъ:

$$\delta z_0 = q\gamma_1 cos(p\gamma_1 q) = p\gamma_1 = M\gamma,$$

слѣдовательно, если $M\gamma = \Delta_1$:

$$\Delta\Delta_1 = pR + (X_1 - X_2) sin a cos a. \qquad (176)$$

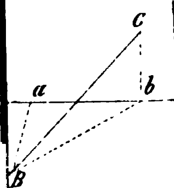
Это уравненіе, представляющее соотношеніе между кратчайшими разстояніями прямыхъ (C) и (Γ) отъ оси Oz, вмѣстѣ съ ур. (174) и извѣстнымъ направленіемъ кратчайшаго разстоянія Δ опредѣляетъ положеніе прямой (C).

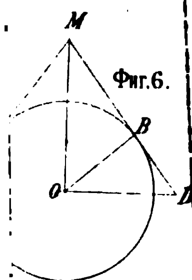
ВАЖНѢЙШІЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Стран.	*Строка:*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ читать:*
4	въ выноскѣ	23	16
10	5 сн.	Особенною поверхностью	Поверхностью особенност
19	7 сн.	X^2	X_2
29, 33	въ выноскѣ	Mazoni	Masoni
38	8 и 11 сн.	$tg(CON)$	$tg(cON)$
42	2 св.	$\frac{1}{M_0R}$	$\theta = \frac{1}{M_0R}$
43	1 сн.	$\cos(COK)$	$\cos(C,OK)$
44	2 св.	$\cos(COT)$	$\cos(C,OT)$
44	6 сн.	$K_1x^2 + K_2y^2$	$K_1^2x^2 + K_2^2y^2$
47	7 св.	$\cos(\Gamma OT)$ $\cos(\Gamma' OK)$	$\cos(\Gamma,OT)$ $\cos(\Gamma,OK)$
49	11 св.	$n_0 z_0$	$n_0 \zeta_0$
49	3 сн.	ур. (104) опредѣляютъ	ур. (104) при всякихъ ξ_0, η_0, ζ_0 опредѣляютъ

Къ ст

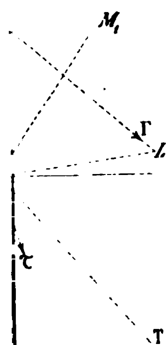
иг. 2.





Фиг. 6.

Фиг. 5.



Къ теоріи вѣкового охлажденія земли.

М. П. Рудзкаго.

Sur la théorie du refroidissement séculaire du globe terrestre.

M. P. Rudzki.

---

§ 1. Вступленіе. Условія въ поверхности.

Вопросъ вѣкового охлажденія земли разбирался Фурье[1]), Пуассономъ, Риманомъ, Бишофомъ, Томсономъ и другими.

Въ послѣднее время онъ былъ затронутъ въ извѣстномъ спорѣ Фэя[2]) и Лаппарана о фигурѣ земли и Э. Дрыгальскимъ[3]).

Выводы, помѣщенные здѣсь, по большей части независимы отъ предположенія о первоначальномъ распредѣленіи температуры внутри земли. Предполагается, что земля есть тѣло, теряющее теплоту; но такое заключеніе неминуемо слѣдуетъ изъ повсемѣстнаго увеличенія температуры по мѣрѣ углубленія. Впрочемъ, если дается предпочтеніе какой-либо гипотезѣ, то

---

[1]) Fourrier. Annales de Chimie et Physique, XIII томъ.
Poisson. Theorie mathematique de la chaleur.
Riemann. Partielle Differentialgleichungen.
Thomson W. «Cooling of the Earth» прибавл. къ «Treatise on Nat. Phil.» Thomson et Tait II изданіе.
Bischof G. Die Wärmelehre des Inneren Unseres Planeten.

[2]) Статьи Фэя въ Comptes Rendus за 1886 г. въ «Revue Scientifique». Лаппарана въ «Revue Scientifique».

[3]) E. v. Drygalski. Die Bewegungen der Continente zur Eiszeit. Verhandl. des VIII deutschen Geographentages.

уже несомнѣнно гипотезѣ Лапласа и Фурье, такъ какъ она лучше всего согласуется съ цѣлымъ рядомъ фактовъ, съ самыми разнообразными данными, заимствованными изъ Геологіи и Астрономіи.

Прямое доказательство, что она справедлива, не существуетъ. Не будемъ напрасно пытаться доказать ее, но взаимно не будемъ разсматривать другихъ гипотезъ, придуманныхъ съ цѣлью выяснить увеличеніе температуры по мѣрѣ углубленія. Несмотря на авторитетъ Пуассона и Мора, ихъ гипотезы преданы забвенію. Крайне оригинальная гипотеза Лошмидта [1]), основанная на нѣсколько противурѣчащемъ опыту предположеніи, что внѣшнія силы могутъ производить вліяніе на частичныя скорости, почти не нашла поклонниковъ.

Упуская изъ виду вѣковыя измѣненія въ распредѣленіи суши и моря и въ направленіи холодныхъ и теплыхъ теченій, можно сказать, что дно Океановъ содержится во всякомъ мѣстѣ въ извѣстной постоянной температурѣ. Глубокомѣрныя экспедиціи послѣднихъ десятковъ лѣтъ обнаружили эти температуры. Для болѣе изслѣдованнаго Атлантическаго Океана имѣются уже удовлетворительныя карты температуръ морского дна въ родѣ напримѣръ карты въ атласѣ Гамбургской Обсерваторіи.

Физическія условія выражаются аналитически крайне просто. Функція, выражающая температуру земли должна въ области, соотвѣтствующей дну Океановъ принимать въ извѣстной поверхности, извѣстныя опредѣленныя значенія.

Что касается поверхности суши, то здѣсь встрѣчаются болѣе сложныя условія. Поверхность ея нагрѣвается лѣтомъ и днемъ, охлаждается зимою и ночью. Здѣсь идетъ обмѣнъ между отчасти ясными, отчасти темными лучами солнца и исключительно темными лучами земли. Пуассонъ [2]), разбирая условія

---

[1]) Loschmidt. Ueber den Zustand des Wärmegleichgewichtes. Sitzber. Akad. Wiss. Wien II Abth. LXXIII томъ, стр. 128, 366.

[2]) Poisson, loc. cit. Глава XI.

потери теплоты въ поверхности суши, взялъ во вниманіе прибыль теплоты отъ воздуха, солнца и звѣздъ, но выраженіе, предложенное имъ неудовлетворительно. Оно составлено въ томъ предположеніи, что токъ теплоты, выходящій изъ земли прямо пропорціоналенъ разности температуръ т. е. въ основаніе разсужденія принятъ Ньютоновъ законъ лучеиспусканія. Между тѣмъ въ выраженіе тока входитъ членъ, пропорціональный разности температуры поверхности земли и междупланетнаго пространства. Но эта послѣдняя температура неизвѣстна въ точности. Съ другой стороны она навѣрно ниже самыхъ низкихъ температуръ, наблюдаемыхъ на поверхности земли. Извѣстно-же, что въ Восточной Сибири случаются морозы, во время которыхъ термометръ падаетъ на шестьдесятъ слишкомъ градусовъ ниже нуля. Пулье и Фрэлихъ [1]) вычисляютъ для междупланетнаго пространства температуры еще далеко ниже этихъ крайне низкихъ температуръ. Первый нашелъ—143° С., второй—127° С. и—131° С. — Такимъ образомъ разность между температурой поверхности земли и междупланетнаго пространства можетъ превышать сто градусовъ С. Между тѣмъ Ньютоновъ законъ лучеиспусканія справедливъ только для очень малыхъ разностей температуръ. Опыты Делароша [2]) показали, что онъ абсолютно непримѣнимъ къ разностямъ въ 80 и больше градусовъ. Уже для разностей въ нѣсколько десятковъ градусовъ онъ даетъ невѣрные результаты.

Но точный законъ лучеиспусканія неизвѣстенъ. Поэтому мы должны иначе поставить вопросъ. Обходя законъ лучеиспусканія и вообще упрощая задачу, мы возьмемъ въ основаніе дальнѣйшихъ разсужденіе то основное положеніе теоріи теплоты, что температура тѣла, внутри котораго передача теплоты совершается по законамъ теплопроводности вполнѣ опредѣлена,

---

[1]) Fröhlich Repert. für Meteorologie VI томъ.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de Physique, 207 ** II томъ.

коль скоро извѣстны: распредѣленіе температуры внутри тѣла въ извѣстный моментъ и, начиная съ этого момента, температура его поверхности. Мы потомъ ближе разсмотримъ эту постановку вопроса. Теперь мы должны сдѣлать нѣкоторыя предварительныя замѣчанія.

§ 2. Вліяніе конвекціи на геотермическій градіентъ.

Передача теплоты внутри земли совершается нетолько путемъ теплопроводности, но тоже путемъ конвекціи. — Посмотримъ каково ея вліяніе. — Конвективные токи невозможны въ ядрѣ земли. Еслибъ даже, какъ полагаютъ А. Риттеръ и Г. Спенсеръ, всѣ вещества ядра земли находились въ сверхъ критическомъ состояніи [1]), то еще частицы газа, котораго плотность почти равна плотности металловъ, который находится подъ давленіемъ не то сотенъ тысячъ, а милліоновъ атмосферъ, не моглибы двигаться. — Въ ядрѣ земли передача теплоты должна совершаться по законамъ теплопроводности, хотя, конечно, коэффиціенты теплопроводности и теплоемкости тѣлъ, находящихся въ тѣхъ исключительныхъ условіяхъ, которыя тамъ господствуютъ, составляютъ нѣчто совершенно для насъ неизвѣстное. Конвекція играетъ главную роль въ земной корѣ.

Имѣются два вида конвекціи: вулканическая, и та, которая совершается посредствомъ воздушныхъ и водяныхъ теченій.

Вулканическая конвекція ограничивается нѣкоторыми областями. Она дѣйствуетъ прерывистымъ образомъ, особенно, если вулканъ не принадлежитъ къ разряду постоянно «работающихъ» какъ напримѣръ Стромболи.

---

[1]) Критической температурой называется такая, при которой, не смотря на самое сильное давленіе, тѣло обращается въ газъ. Гульдбергъ полагаетъ, что даже для платина эта температура не выше 7000°. Однако нельзя полагаться на эти результаты. Guldberg. Zeitschrift für phys. Chemie. Bd. I, стр. 231.

Сюда-же должна быть отнесена потеря теплоты, выходящей вмѣстѣ съ газами и парами въ мофеттахъ и сольфатарахъ. Теплые ключи составляютъ переходное явленіе къ водяной конвекціи.

Вулканическая конвекція вызываетъ сразу громадныя потери теплоты. Однако, благодаря своему мѣстному и прерывистому характеру она въ итогѣ производитъ меньшее вліяніе, чѣмъ явленія повсемѣстныя и постоянныя, хотя на первый видъ болѣе слабыя. Ради сравненія приведемъ слѣдующее вычисленіе. Тоже сáмое количество теплоты, которое, благодаря теплопроводному току, въ продолженіе одного года выходитъ наружу сквозь одинъ квадратный метръ земной поверхности, равно той работѣ, которая нужна для того, чтобы поднять на высоту ста метровъ столбъ лавы, имѣющій въ основаніи 8 квадр. метр. и 1000 метровъ высоты. Температура плавленія лавы опредѣляется никакъ не ниже 1300° С, считая отъ абсолютнаго нуля. Ея теплоемкость при столь высокой температурѣ неизвѣстна, но можно предположить, что теплоемкость единицы массы въ пять разъ меньше теплоемкости единицы массы воды [1]). Тогда съ нашимъ столбомъ лавы подымается столько единицъ теплоты, сколько, благодаря теплопроводному току уходитъ сквозь 1100 кв. метр. земной поверхности. При этомъ вычисленіи было предположено, что теплопроводный токъ уноситъ въ годъ 50 единицъ С. G. S. сквозь одинъ квад. сантиметръ земной поверхности. По Г. Г. Дарвину [2]) напряженность этого тока опредѣляется въ 45,9 единицъ С. G. S. По комитету отъ «British Association» въ 41 един. С. G. S. по Эли де-Бомону 52, по Лаппарану 51 [3]).

---

[1]) Everett. Physical Units and Constants. London, 1879, стр. 80, Теплоемкость стекла между 0° и 300°—0,1990. Для трапа выходитъ почти тоже самое число. См. стр. 101.

[2]) Precession of a viscous spheroid. Phil. Trans. 1879 г.

[3]) Forel. La faune profonde. Nouv. Mem. Soc. Helv. XXIX, стр. 18.

Вулканическая конвекція занимаетъ нѣкоторое мѣсто въ общемъ балансѣ расхода теплоты, но на величину геотермическаго градіента она имѣетъ вліяніе только въ вулканическихъ областяхъ.

Круговращеніе воды и воздуха повсемѣстно въ области суши. Послѣднее ограничено верхнимъ слоемъ почвы. Мы не будемъ точно разбирать условій въ этомъ слоѣ. Для насъ важенъ вопросъ, каково вліяніе конвекціи на величину геотермическаго градіента. Между тѣмъ этотъ поверхностный слой имѣетъ настолько незначительную толщину, что увеличеніе градіента или уменьшеніе, ограниченное этимъ слоемъ имѣетъ крайне малое вліяніе на общее поднятіе или пониженіе всѣхъ геоизотермовъ. Объ этомъ поверхностномъ слоѣ почвы мы скажемъ только то, что нужно для болѣе яснаго уразумѣнія условій, существующихъ въ нѣсколько болѣе глубокихъ пластахъ.

Въ этомъ поверхностномъ слоѣ въ иныхъ мѣстахъ обнаруживаются особенности, доказывающія, что конвекція играетъ въ немъ весьма важную роль.

Кривая *среднихъ* температуръ всюду постоянно повышается по мѣрѣ углубленія, начиная съ самой поверхности. Въ Сиднеѣ, Мельбурнѣ, Нукусѣ, Тифлисѣ и Гриничѣ на промежуткѣ нѣсколькихъ первыхъ метровъ она дѣлаетъ изгибъ внизъ. Это явленіе было впервые замѣчено и оговорено Академикомъ Вильдомъ [1]), потомъ Э. Лейстомъ [2]). Для примѣра я привожу данныя для Нукуса, причемъ замѣчаю, что въ точности этихъ наблюденій особенно Нукусскихъ и Тифлисскихъ не можетъ быть ни малѣйшаго сомнѣнія. Наблюденія въ Нукусѣ и Тифлисѣ дѣлались чрезвычайно тщательно, въ первой мѣстности черезъ

---

[1]) H. Wild. Ueber Bodentemp. zu St.-Petersburg und Nukuss. Repert. für Meteorologie, VI томъ.

[2]) E. Leyst. Die Bodentemperaturen in Pawlowsk. Относительно Тифлиса см. наблюденія Тифлисской Обсерваторіи 1880—1883 года.

всякіе два часа, во второй ежечасно. Данныя для прочихъ мѣстъ находятся въ работѣ Вильда, изъ которой я извлекаю слѣдующія числа (табл. XVIII).

Средняя температура въ Нукусѣ.

Въ глубинѣ	за 1875	1876	1877 годъ
10 сант.	» 13°,54	12°,93	12°,56 »
20 »	» 13°,69	13°,24	12°,98 »
40 »	» 14°,70	14°,35	14°,56 »
80 »	» 15°,21	15°,15	15°,88 »
160 »	» 15°,11	15°,22	14°,82 »
280 »	» 14°,31	14°,46	14°,69 »
400 »	» 13°,86	14°,01	14°,21 »

Дальше повышеніе температуры.

Такой изгибъ кривой среднихъ температуръ можетъ быть объясненъ только вліяніемъ конвекціи. При чисто теплопроводномъ процессѣ онъ можетъ быть объясненъ только вѣковыми колебаніями климата. Но какъ справедливо замѣчаетъ Э. Лейстъ[1]) эти послѣднія отражаются въ тѣмъ большей глубинѣ, чѣмъ ихъ періодъ длиннѣе. Между тѣмъ этотъ изгибъ кривой среднихъ температуръ замѣчается въ глубинѣ значительно меньшей, чѣмъ та, въ которой замѣтны годичныя колебанія температуры. — Лейстъ даетъ слѣдующее по моему вполнѣ раціональное объясненіе этого явленія для Нукуса[2]). «Дожди падаютъ здѣсь главнымъ образомъ въ холодное время года отъ Января до Мая. Температура дождевой воды въ среднемъ на 6° ниже средней температуры высшаго поверхностнаго слоя. Почвенная вода

[1]) Loc. cit., стр. 304.
[2]) Loc. cit., стр. 307.

стоитъ въ Нукусѣ на глубинѣ 4 метровъ и пополняется именно этой холодной дождевой водою, а потому температура почвы въ этой глубинѣ понижается». Вообще Лейстъ думаетъ, что въ поверхностномъ слоѣ круговращеніе воды играетъ крупную роль.

Въ этомъ поверхностномъ слоѣ перемежаются періоды высыханія и пропитанія водою. Растенія тянутъ воду вверхъ своими корнями. Несомнѣнно часто случается, во время засухи, что вода подходитъ вверхъ въ волосныхъ порахъ и скважинахъ.

Изслѣдованія Дальтона, Маріотта и Грэве показали[1]), что по всей вѣроятности, въ Европѣ только немногимъ больше одной трети атмосферной воды проникаетъ въ почву, остальное испаряется на поверхности. Изъ этой трети только небольшая часть идетъ глубже, большая совершаетъ свой круговоротъ въ поверхностныхъ слояхъ почвы. Замѣтимъ, что всѣ ключи и источники, которые сейчасъ послѣ дождей усиливаютъ свою дѣятельность, несомнѣнно питаются водою, совершающей, если можно такъ сказать, малый круговоротъ, а такихъ источниковъ очень много.

Количество атмосферной воды совершающей большой круговоротъ, конечно, не можетъ быть точно оцѣнено, но оно значительно меньше одной трети общаго количества выпадающаго на долю извѣстной области.

Отдѣлимъ мысленно поверхностный слой въ нѣсколько или въ крайнемъ случаѣ въ нѣсколько десятковъ метровъ. Ниже этого слоя нигдѣ не встрѣчаются аномаліи въ родѣ вышеуказанныхъ. Извѣстно, что артезіонская вода вообще не получается изъ кристаллическихъ породъ, развѣ только въ такомъ случаѣ[2]), когда онѣ сильно потресканы. Такъ какъ въ осно-

---

[1]) Ср. Мушкетовъ. Физическая Геологія, стр. 167, II часть.

[2]) Ср. Мушкетовъ, loc. cit., II часть, стр. 172.

ваніи геологическихъ формацій всюду въ той или другой глубинѣ залегаютъ кристаллическія и метаморфическія породы, то, по всей вѣроятности, нижній предѣлъ круговращенія воды нигдѣ не лежитъ глубже, какъ на разстояніи нѣсколькихъ километровъ отъ поверхности. Притомъ на такихъ глубинахъ, которыя находятся ниже всѣхъ окрестныхъ овраговъ и впадинъ, вода можетъ возвращаться на поверхность только благодаря гидростатическому давленію. Это конечно не способствуетъ скорости круговращенія, ибо, благодаря гидростатическому давленію можетъ вытекать только излишекъ сверхъ того количества воды, которое нужно для совершеннаго пропитанія пластовъ водою.

Вообще для существованія восходящаго [1]) источника нужно, чтобы питающая его вода не могла какъ-нибудь уходить бокомъ.

Весьма сомнительно, существуетъ-ли круговращеніе воды въ пластахъ, залегающихъ подъ дномъ Океановъ. Подводные ключи прѣсной воды, питаемые атмосферной влагой, падающей на сосѣднюю сушу, встрѣчаются довольно часто вблизи береговъ. Но другое дѣло, можетъ-ли морская вода проникать, скажемъ въ центральныхъ областяхъ Океановъ, подъ дно а потомъ опять возвращаться. Замѣтимъ, что илы, покрывающіе столь обширныя пространства дна, крайне непроницаемы для воды. Нисходящіе источники (соленой воды разумѣется) почти невозможны вслѣдствіе недостатка болѣе рѣзкихъ скатовъ и наклонностей дна. На громадномъ пространствѣ дно бываетъ почти горизонтально. Наконецъ для восходящихъ источниковъ, какъ вообще для всѣхъ, нѣтъ, такъ сказать, двигающей причины. Дѣйствительно. Вообразимъ даже, что нѣкоторая скважина выходитъ обоими концами на поверхность дна. Нѣтъ никакой надобности, чтобы вода двигалась въ этой скважинѣ въ томъ

---

[1]) Ср. Мушкетовъ, loc. cit., II часть, стр. 170.

или другомъ направленіи, ибо давленіе всегда и всюду равномѣрно. Здѣсь, т. е. на днѣ моря, нѣтъ той измѣнчивости разныхъ факторовъ, которая даетъ толчекъ къ круговращенію воды въ пластахъ, залегающихъ въ области суши.

Нѣкоторые ученые предполагаютъ, что вода нашихъ Океановъ и атмосферная вода медленно всякаетъ въ глубину. Если даже совершается такой процессъ, то во всякомъ случаѣ нѣтъ причины думать, чтобы онъ совершался съ большей скоростью подъ дномъ Океановъ, именно вслѣдствіе крайне малой водопроницаемости пластовъ, залегающихъ на днѣ. Впрочемъ вліяніе этого явленія во всякомъ случаѣ совсѣмъ ничтожно.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что можно-бы сравнить землю съ шаромъ, внутри котораго передача теплоты совершается по законамъ теплопроводности, но въ нѣкоторой области, соотвѣтствующей нашимъ материкамъ, этотъ шаръ покрытъ тонкой въ сравненіи съ радіусомъ шара оболочкой, въ которой передача теплоты совершается не только по законамъ теплопроводности, но тоже по законамъ конвекціи. Вліяніе ея вообще увеличивается отъ основанія оболочки до поверхности. Въ самомъ поверхностномъ слоѣ оно сильно усложняется, а вмѣстѣ съ тѣмъ играетъ чуть-ли не самую важную роль.

Оставляя въ сторонѣ эти поверхностные слои, разсмотримъ вліяніе конвекціи въ болѣе глубокихъ пластахъ оболочки.

Вода проникаетъ въ глубину по трещинамъ и скважинамъ и кромѣ того повсемѣстнымъ просачиваніемъ сквозь породы, возвращается на поверхность по скважинамъ и трещинамъ. Температура воды въ жилахъ конечно не остается безъ вліянія на температуру окружающихъ водяную жилу породъ, но то-же самое количество воды производитъ тѣмъ меньшее вліяніе на сосѣднія породы, чѣмъ разрѣзъ жилы больше. Вслѣдствіе этого на градіентѣ отразится прежде всего вліяніе воды, просачивающейся сквозь породы сверху внизъ. Это вліяніе

можетъ быть оцѣнено въ качественномъ отношеніи, какъ это сейчасъ увидимъ.

Вообразимъ себѣ мысленно слой пористаго твердаго вещества. Пусть теплопроводный токъ идетъ въ вертикальномъ направленіи къ плоскостямъ напластованія, да притомъ снизу вверхъ, въ то время, какъ въ прямопротивуположномъ направленіи идетъ токъ воды, обладающей извѣстной температурой. Будемъ разсматривать безконечно тонкій призматическій или цилиндрическій элементъ объема. Его основанія параллельны къ плоскостямъ напластованія. (Мы предполагаемъ, что эти плоскости горизонтальны). Площадь этихъ основаній равна единицѣ поверхности. Проведемъ вертикальную ось координатъ, и обозначимъ ее посредствомъ z. Ея положительное направленіе считается съ низу вверхъ.

Положимъ, что въ единицу времени[1]) теплопроводный токъ вноситъ въ элементъ объема сквозь нижнее основаніе:

s единицъ теплоты

сквозь верхнее уноситъ:

$$s + \frac{ds}{dz} dz \text{ единицъ теплоты.}$$

Въ то-же самое время вода выноситъ сквозь нижнее основаніе:

q единицъ теплоты

а вноситъ сквозь верхнее

$$q + \frac{dq}{dz} dz \text{ единицъ теплоты.}$$

---

[1]) *Примѣчаніе.* Предполагается безконечно малая единица времени.

Тогда въ элементѣ остается:

$$-\left(\frac{ds}{dz}-\frac{dq}{dz}\right)\cdot dz \text{ единицъ теплоты.}$$

Объемъ элемента равенъ: dz, теплоемкость вещества: c,[1]) его плотность: ρ. Вслѣдствіе измѣненія количества теплоты въ элементѣ, его температура измѣняется. При томъ вообще плотность и теплоемкость могутъ измѣняться; послѣ истеченія единицы времени, плотность будетъ: $\rho+d\rho$; теплоемкость будетъ: $c+dc$. — Извѣстно, что, если измѣненіе количества теплоты въ извѣстномъ объемѣ раздѣлимъ на произведеніе объема на плотность вещества и на его теплоемкость, то получимъ измѣненіе температуры вещества.

Отсюда, такъ какъ: $\frac{dV}{dt}$ [гдѣ V обозначаетъ температуру, а t время] есть измѣненіе температуры въ единицу времени; получаемъ равенство:

$$-\left(\frac{ds}{dz}-\frac{dq}{dz}\right)=c\rho\cdot\frac{dV}{dt}\cdot \qquad \text{I}$$

Образуя это равенство, мы пренебрегли безконечно малыми величинами.

Положимъ, что ось z начинается въ той глубинѣ, гдѣ конвекція исчезаетъ, т. е. гдѣ $q=o$. Интегрируя обѣ стороны уравненія: I отъ $z=o$ до $z=z$ получимъ:

$$s-q=s_0-\int_0^z c\rho\frac{dV}{dt}dz.$$

Въ этомъ уравненіи: c и ρ величины существенно положительныя, тоже самое, согласно условіямъ задачи, справедливо относительно q и s_0. Въ поверхностномъ слоѣ s бываетъ то положительно, то отрицательно. Въ тѣхъ слояхъ, которые мы

---

[1]) *Прим.* c и ρ—теплоемкость и плотность породы, пропитанной водою

разсматриваемъ, скажемъ примѣрно ниже такъ называемой нейтральной поверхности s всегда положительно.

Опытъ показываетъ, что измѣненіе температуры внутреннихъ слоевъ земли совсѣмъ неуловимо для нашихъ инструментовъ. Вспомнимъ только термометръ Лавуазіе въ подвалахъ Парижской обсерваторіи. Поэтому можно положить, что $\frac{dV}{dt}$ почти равно нулю или другими словами, мы предполагаемъ, что эти температуры почти стаціонарны. Въ такомъ случаѣ:

$$s - q = s_0, \tag{II}$$

между тѣмъ, при отсутствіи тока воды было-бы:

$$s = s_0. \tag{III}$$

Замѣтимъ, что въ случаѣ: II, s должно увеличиваться по направленію къ поверхности, ибо q уменьшается отъ поверхности до горизонта $z = o$. Въ случаѣ: II s постоянно. Геотермическій градіентъ обратно пропорціоналенъ напряженности теплопроводнаго тока, коль скоро коэффиціенты теплопроводности одинаковы. Присутствіе конвективнаго тока, направленнаго сверху внизъ увеличиваетъ s, а вслѣдствіе этого уменьшаетъ градіентъ. Замѣтимъ, что, если-бы сдѣлать предположеніе, что тѣло охлаждается, т. е. что: $\frac{dV}{dt}$ отрицательно, то градіентъ долженъ тогда еще больше уменьшиться. Изъ этого можно вывести заключеніе, что подъ поверхностью суши въ той оболочкѣ, въ которой совершаются конвективныя явленія, градіентъ вообще меньше, нежели при отсутствіи конвективнаго тока, идущаго сверху внизъ.

Не вижу фактовъ, прямо противурѣчащихъ этому заключенію. Скорѣе замѣчаю нѣкоторые пожалуй говорящіе въ его пользу. Извѣстно, что градіентъ вблизи поверхности вообще

на половину меньше, чѣмъ на большихъ глубинахъ. Вильдъ опредѣляетъ среднiй градiентъ въ поверхностныхъ слояхъ въ 15 метровъ, Лейстъ въ 12, въ то время какъ среднiй градiентъ для болѣе глубокихъ пластовъ больше 30 метровъ. Быть можетъ, что замѣчаемое въ кристаллическихъ породахъ увеличенiе градiента противъ средняго (въ гнейссахъ Минасъ Гераесъ въ Бразилiи градiентъ: 86 метровъ) происходитъ отчасти отъ отсутствiя конвективнаго тока, нетолько отъ большей теплопроводности.

На основанiи сказаннаго смѣемъ предполагать, что подъ дномъ Океановъ *«ceteris paribus»* градiентъ долженъ быть больше, чѣмъ подъ поверхностью суши.

Этимъ прекращаемъ разборъ влiянiя конвекцiи. Можно-бы многое сказать про нее, но считаемъ неумѣстнымъ начинать изслѣдованiе конвективныхъ явленiй, столь мало вообще разработанныхъ, со случая сравнительно сложнаго. Впрочемъ то, къ чему мы стремились: оцѣнка влiянiя конвекцiи на градiентъ, уже достигнуто. Повторяемъ еще разъ слова *«на градiентъ»*, отмѣчая такимъ образомъ, что мы не опредѣляемъ баланса расхода и прихода теплоты въ поверхностныхъ слояхъ суши.

Мы должны сдѣлать еще два замѣчанiя. Первое, что такъ называемая горная влажность очевидно не играетъ никакой роли въ конвективныхъ явленiяхъ. Она есть въ физическомъ смыслѣ одна изъ составныхъ частей породы. Ея влiянiе ограничивается теплоемкостью и теплопроводностью породъ.

Второе. Конвективныя явленiя отражаются и въ теплопроводныхъ, особенно въ поверхностномъ слоѣ, гдѣ рыхлая почва то пропитывается водою, то высыхаетъ. А. Литтровъ [1]) нашелъ, что влажная почва лучше проводитъ теплоту, чѣмъ сухая. Легко уразумѣть причину этого явленiя, если вспомнить, что въ су-

[1]) A Littrow. Ueber relative Wärmeleitungsfähigkeit. Sitzb. Akad. Wiss. Wien, LXXXI, II Abt., стр. 110.

хой почвѣ скважины и поры наполнены крайне плохо проводящимъ теплоту воздухомъ, а въ влажной лучше проводящей водою.

Можно бы подумать, что въ тѣхъ мѣстахъ, какъ напримѣръ Нукусъ, гдѣ кривая среднихъ температуръ на нѣкоторомъ промежуткѣ по направленіи къ поверхности подымается, въ общемъ итогѣ теплопроводный токъ не только не причиняетъ убытка, но скорѣе прибыль теплоты. Изъ опытовъ Литтрова слѣдуетъ, что такое заключеніе было бы нѣсколько преждевременно. Въ Нукусѣ напримѣръ почва пропитывается влагою и лучше проводитъ теплоту именно въ холодное время года (отъ Января до Мая) т. е. въ то время, когда теплопроводный токъ уноситъ теплоту наружу.

Вслѣдствіе этого легко можетъ случиться, что расходъ теплоты въ это время превышаетъ прибыль, получаемую въ сухое и жаркое время, когда почва хуже проводитъ теплоту. Впрочемъ теплота уходитъ и съ водою, возвращающейся на поверхность земли.

§ 3. Нѣкоторыя общія положенія объ охлажденіи тѣлъ.

Мы будемъ сравнивать землю съ охлаждающимся шаромъ, котораго поверхность содержится въ извѣстныхъ температурахъ. Полученный въ предъидущемъ параграфѣ результатъ, что градіентъ «ceteris paribus» долженъ быть больше подъ дномъ Океана будетъ служить основаніемъ для нѣкоторой поправки результатовъ. Мы потомъ возвратимся къ этому вопросу и посмотримъ на него съ другой стороны. Теперь мы сдѣлаемъ нѣкоторые общіе выводы, касающіеся законовъ охлажденія тѣлъ, внутри которыхъ передача теплоты совершается по законамъ теплопроводности. Эти выводы бросятъ нѣкоторый свѣтъ на споръ Фэя[1]) и Лаппарана и на работу Дрыгальскаго. Съ дру-

[1]) *Примѣчаніе.* Работы этихъ авторовъ, равно какъ Дрыгальскаго, были упомянуты въ началѣ 1-го параграфа.

гой стороны они ведутъ къ нѣкоторымъ не лишеннымъ интереса заключеніямъ.

Мы должны припомнить читателю, что Фэй защищалъ мнѣніе, будто земля болѣе охлаждена подъ Океанами, чѣмъ подъ поверхностью суши. Лаппаранъ отчасти оспаривалъ это мнѣніе. Дрыгальскій хотѣлъ изслѣдовать деформаціи, происходящія отъ мѣстнаго болѣе или менѣе скораго охлажденія земной коры.

Первое положеніе можетъ быть высказано слѣдующими словами: *Если два одинаковыя, однородныя тѣла A и B, поставленныя въ одинаковыя впрочемъ условія, теряютъ теплоту по законамъ теплопроводности, но поверхность тѣла A содержится въ нѣкоторой температурѣ: ζ, а тѣло B свободно испускаетъ лучи теплоты въ среду, которой температура есть тоже: ζ, то въ любое время, въ тѣхъ-же самыхъ внутреннихъ точкахъ, тѣло A будетъ имѣть всегда температуру болѣе низкую, или въ крайнемъ случаѣ равную температурѣ тѣла B.*

Это слѣдуетъ прямо изъ принциповъ аналитической теоріи теплоты. Дѣйствительно, мы предполагаемъ, что первоначальныя температуры обоихъ тѣлъ, ихъ фигура, вещество одинаковы. Единственная разница въ томъ, что поверхность тѣла A содержится въ температурѣ ζ, а поверхность втораго тѣла свободно испускаетъ лучи теплоты. Температура поверхности тѣла B никакъ не можетъ сдѣлаться[1]) ниже ζ т. е. температуры среды, она всегда больше этой температуры, хотя разность температуръ можетъ сдѣлаться крайне малой. Т. е. температура поверхности тѣла B будетъ $\zeta+\varphi$, гдѣ φ есть всегда положительная величина.

Но температура тѣла всюду и во всякое время опредѣлена, коль скоро извѣстны: 1) первоначальная температура,

---

[1]) Мы говоримъ объ охлажденіи. Eo ipso предполагается, что первоначальная температура по крайней мѣрѣ вблизи поверхности была выше ζ.

2) температура поверхности. Возьмемъ третье тѣло C абсолютно сходное во всѣхъ отношеніяхъ съ тѣлами A и B и будемъ содержать его поверхность въ перемѣнной температурѣ $\zeta+\varphi$. Тогда тѣло C всегда и всюду будетъ имѣть абсолютно тѣ-же самыя температуры, что и B. Все, что справедливо для C, справедливо для B. Но касательно условій въ поверхности теперь тѣла A и C совсѣмъ сходны, ихъ поверхности содержатся въ температурахъ, одна ζ другая $\zeta+\varphi$.

Аналитическія выраженія для температуры тѣлъ: A, B, C удовлетворяютъ тому-же самому дифференціальному уравненію:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{k}{c}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right\} \qquad \text{I}$$

здѣсь c обозначаетъ коэффиціентъ теплоемкости, отнесенной къ объему, k коэффиціентъ теплопроводности, t время, V температуру, x, y, z прямолинейныя координаты. Температура тѣла A должна удовлетворять слѣдующему условію въ поверхности:

$$V_A=\zeta \qquad \text{II}$$

температура тѣла C удовлетворяетъ условію въ поверхности:

$$V_C=\zeta+\varphi. \qquad \text{III}$$

Теорія дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ съ постоянными коэффиціентами говоритъ, что, если вторичныя условія линейны, то аналитическія рѣшенія могутъ быть раздѣлены на части. Замѣтимъ кстати, что и условіе для момента $t=o$

$$V_A=V_B=V_C=\psi(x, y, z)$$

[гдѣ ψ выражаетъ первоначальное распредѣленіе температуры] тоже линейно.

Разложимъ: V_A на части: зависимыя отъ температуры

поверхности и отъ первоначальной температуры, тоже самое сдѣлаемъ съ V_C, получимъ:

$$V_A = V_\psi + V_\zeta$$

$$V_C = V_\psi + V_\zeta + V_\varphi.$$

Причемъ для $t=o$, $V_\zeta=o$, $V_\varphi=o$, $V_\psi=\psi$.
Для поверхности тѣлъ, во всякое время:

$$V_\psi=o \quad V_\zeta=\zeta, \quad V_\varphi=\varphi.$$

Причемъ всѣ эти функціи удовлетворяютъ уравненію I.
Вычтемъ V_A изъ V_C, или, такъ какъ $V_B=V_C$, изъ V_B

$$V_C-V_A=V_B-V_A=V_\varphi$$

V_φ никогда не можетъ быть отрицательной величиной. Оно всегда или положительно, или въ крайнемъ случаѣ равно нулю. Дѣйствительно. V_φ независитъ отъ другихъ подобныхъ ему функцій. Но еслибы предположить, что $\zeta=o$, $\psi=o$ то тогда: $V_\psi=o$, $V_\zeta=o$. Пусть это будетъ абсолютный нуль шкалы температуръ, тогда, допуская, что V_φ можетъ сдѣлаться отрицательнымъ мы бы допустили возможность нелѣпости, отрицательной температуры.

И такъ $V_\varphi > o$, и будучи независимымъ отъ прочихъ температуръ, оно всегда останется положительнымъ.

Такимъ образомъ наше замѣчаніе доказано. Оно можетъ быть распространено на тѣла, состоящія изъ частей, разнаго, но порознь однороднаго вещества. Дѣйствительно. Въ отдѣляющихъ поверхностяхъ имѣются тогда условія

$$V_{\text{I}} = V_{\text{II}}$$

$$k_{\text{I}} \frac{dV_{\text{I}}}{dn} = k_{\text{II}} \frac{dV_{\text{II}}}{dn}$$

Здѣсь V_I и V_{II} обозначаютъ температуры сосѣднихъ частей, n есть нормаль къ отдѣляющей поверхности. Эти условныя уравненія тоже *линейны*. Первое выражаетъ тотъ фактъ, что въ отдѣляющей поверхности температуры обоихъ веществъ равны. Второе выражаетъ то условіе, что то количество теплоты, которое выходитъ изъ одного вещества, входитъ въ другое.

Впрочемъ, наше замѣчаніе, очевидно, имѣетъ общее значеніе. *Когда передача теплоты внутри тѣла совершается по законамъ теплопроводности, то «ceteris paribus» тѣло, котораго поверхность содержится въ температурѣ: ζ въ любое время въ томъ-же самомъ мѣстѣ имѣетъ болѣе низкую температуру, чѣмъ тѣло, свободно лучеиспускающее въ среду, которой температура есть ζ какой ни есть законъ лучеиспусканія.*

Во вторыхъ можно убѣдиться, *что разность V_φ между температурой свободно лучеиспускающаго и искусственно охлаждаемаго тѣла «ceteris paribus» тѣмъ меньше, чѣмъ размѣры тѣлъ больше.*

Температура поверхности охлаждающагося тѣла должна находиться въ зависимости отъ отношенія его объема къ поверхности. Другими словами она есть функція отъ его измѣреній въ пространствѣ. Положимъ, что у насъ есть нѣкоторый линейный параметръ, увеличивающійся съ увеличеніемъ размѣровъ тѣла, уменьшающійся съ уменьшеніемъ его. Согласно сказанному, V и V_φ суть функціи отъ этого параметра. Обозначимъ его посредствомъ α

$$V_\varphi = f(\alpha \ldots .) \quad V = f(\alpha \ldots .).$$

Когда тѣла A и B дѣлаются безконечно большими, внѣшняя поверхность удаляется на безконечное разстояніе, а потому условія, господствующія въ ней не имѣютъ никакого вліянія на термическіе процессы, происходящіе внутри тѣлъ во всѣхъ

точкахъ, находящихся на конечныхъ разстояніяхъ. А потому не можетъ быть разницы между температурами обоихъ тѣлъ. Слѣдовательно функція V_φ есть такая, что для $\alpha = \infty$ она равна нулю. Изъ этого слѣдуетъ, что она должна уменьшаться по мѣрѣ увеличенія параметра α. Дальше, совсѣмъ очевидно, что она должна быть непрерывной функціей этого параметра, да притомъ должна измѣняться въ одномъ направленіи. Предположеніе, что увеличеніе параметра α положимъ отъ α_1 до α_2 сопровождается уменьшеніемъ функціи V_φ, а увеличеніе отъ α_2 до α_3 сопровождается увеличеніемъ, какъ это видно изъ физическаго значенія функціи, совсѣмъ нелѣпо. По этому можно сказать, что *«при равенствѣ прочихъ условій разности температуръ внутри тѣлъ тѣмъ меньше, чѣмъ размѣры ихъ больше»*. Замѣтимъ мимоходомъ, что температура есть чистое число. Между тѣмъ параметръ α имѣетъ измѣренія $[L]$ т. е. это есть нѣкоторая длина. По этому должно быть

$$V = f(\alpha\beta\ldots.)$$

гдѣ β есть параметръ, имѣющій измѣренія: (L^{-1}). Этотъ параметръ будетъ функціей отъ поверхностныхъ условій. Когда законъ лучеиспусканія есть законъ Ньютона, то β есть отношеніе коэффиціента лучеиспусканія къ коэффиціенту теплопроводности. Въ этомъ случаѣ наши замѣчанія могутъ быть провѣрены помощью извѣстныхъ рѣшеній Фурье. Наши параметры обнаруживаются въ трансцендентныхъ уравненіяхъ, встрѣчаемыхъ въ задачахъ Фурье.

Напримѣръ у Фурье температура шара, теряющаго теплоту, выражается рядомъ [1]:

$$\Sigma A_n e^{-a^2 p_n^2 t}.$$

---

[1] Fourrier Analyt. Wärmeth. Uebers. von Weinstein. Глава V.

На основаніи этого рѣшенія Э. Дрыгальскій въ упомянутой выше работѣ дѣлаетъ нѣкоторыя заключенія относительно вліянія поверхностныхъ условій на скорость охлажденія земли.

Когда первоначальное распредѣленіе температуры въ шарѣ есть функція лишь отъ радіуса, а поверхность шара содержится въ температурѣ нуль градусовъ то коэффиціенты p имѣютъ численныя значенія:

$$\frac{\pi}{R}\,,\ \frac{2\pi}{R}\cdots\frac{n\pi}{R}\,.$$

Когда первоначальное распредѣленіе температуры есть функція лишь отъ радіуса, но поверхность испускаетъ лучи теплоты въ среду, которой температура равна нулю градусовъ, то коэффиціенты p опредѣляются изъ трансцендентнаго уравненія:

$$\frac{pR}{hR-1}+tang\,pR=o$$

R обозначаетъ радіусъ земли — h есть отношеніе между коэффиціентами лучеиспусканія и теплопроводности. Фурье[1]) находитъ, что h близко къ единицѣ, если единицей длины взять метръ. Но радіусъ земли равенъ 6370000 метрамъ. А потому величина hR настолько велика, что корни вышеупомянутаго трансцендентнаго уравненія почти равны

$$\frac{\pi}{R}\,,\ \frac{2\pi}{R}\cdots\frac{n\pi}{R}\,.$$

Вслѣдствіе этого, если остальныя условія одинаковы, температуры обоихъ шаровъ почти одинаковы. Онѣ нѣсколько выше у свободно лучеиспускающаго шара.

---

[1]) Annales de Chimie et de Physique, 13 томъ, 1820 года, стр. 421.

Мы разсматривали доселѣ отдѣльныя тѣла. Но наши разсужденія могутъ быть распространены на такое тѣло, котораго поверхность отчасти содержится въ температурѣ ζ, отчасти свободно испускаетъ лучи въ среду, которой температура тоже равна ζ градусамъ. *Подъ лучеиспускающей поверхностью температура выше, чѣмъ была бы тогда, когда таже часть поверхности содержалась-бы въ температурѣ ζ градусовъ.* Желая подробнѣе разсмотрѣть изотермическія поверхности, нужно изслѣдовать отношеніе распредѣленія поверхностныхъ условій къ фигурѣ тѣла во всякомъ отдѣльномъ случаѣ. Относительно шара можно вообще сказать, что *«при равныхъ прочихъ условіяхъ температура выше подъ лучеиспускающей, какъ подъ содержимою въ извѣстной температурѣ поверхностью.* Съ другой стороны *чѣмъ шаръ больше, тѣмъ разности температуръ въ глубинѣ сравнительно меньше.»*

Таковы были причины побудившія меня вести въ «Petermann's Mittheilungen» въ 1 и 4 номерѣ за 1891 годъ полемику съ Э. Дрыгальскимъ, сдѣлавшимъ въ своей работѣ на основаніи ложнаго толкованія приведеннаго здѣсь трансцендентнаго уравненія нѣсколько иные выводы.

Изъ сказаннаго выше можно вывести слѣдующее довольно интересное слѣдствіе. Наша земля есть очень большое тѣло, поэтому разности въ поверхностныхъ условіяхъ вызываютъ незначительныя разности въ температурахъ ядра. Разности въ температурахъ сопряжены съ разностями въ измѣненіи объема. Если объемъ тѣла сокращается неравномѣрно, то внутри тѣла возникаютъ разности натяженія. У земли эти разности будутъ небольшія, благодаря тому, что разности температуръ незначительны въ сравненіи съ ея размѣрами. Слѣдовательно можно сказать, что при существующихъ условіяхъ большіе размѣры земли, не допуская значительныхъ разностей во внутреннихъ температурахъ, дѣлаютъ невозможными большія разности вну-

треннихъ натяженій. Общее равномѣрное сокращеніе объема земли не угрожаетъ ея существованію. Только разности натяженія могли-бы вызвать катастрофу т. е. растрескаціе въ куски.

На этотъ разъ мы говорили преимущественно о ядрѣ земли. Дислокаціи въ земной корѣ являются слѣдствіемъ того, что оболочка слѣдуетъ за сокращающимся ядромъ земли. Мы разсматривали землю, какъ твердое тѣло. Со времени изслѣдованій В. Томсона и Г. Г. Дарвина надъ приливами и отливами оказалось, что земля обнаруживаетъ механическія свойства твердаго тѣла [1]).

Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что мнѣніе Фэя, состоящее въ томъ, что земля болѣе охлаждена подъ Океанами, чѣмъ подъ поверхностью суши покоится на нѣкоторыхъ теоретическихъ основаніяхъ. Однако можно противъ него сдѣлать слѣдующее возраженіе. Поверхность суши испускаетъ лучи теплоты въ междупланетное пространство, котораго температура многими градусами ниже той температуры, въ которой содержится дно Океановъ. Поэтому мы не будемъ дальше обсуждать этого вопроса. Возвратимся къ нему только въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 4. Охлажденіе шара.

Показавъ въ прежнемъ § значеніе условій въ поверхности, разсмотримъ нѣкоторую математическую задачу. Постараемся найти выраженіе температуры однороднаго шара, котораго пер-

---

[1]) Cp. Thomson et Tait. Treat. on Nat. Phil. § 847, § 848.

воначальная температура извѣстна, а температура поверхности постоянна по отношенію къ времени, перемѣнна по отношенію къ широтѣ и долготѣ. Постановка задачи очевидно чрезвычайно проста. Но, благодаря этой простотѣ, мы будемъ въ состояніи выбраться за предѣлы символическихъ рѣшеній, избѣжать гипотетическихъ предположеній о термическихъ свойствахъ веществъ, составляющихъ ядро земли. Между тѣмъ мы будемъ въ состояніи достигнуть нѣкоторыхъ результатовъ, интересныхъ для теоріи охлажденія земли.

Извѣстно, что температура тѣла вполнѣ опредѣлена, коль скоро извѣстна первоначальная температура во всякой его точкѣ и температура поверхности во всякое время. Изъ этого слѣдуетъ, что можно сравнить землю съ шаромъ, у котораго температура поверхности именно такова, какъ температура поверхности земли. Распредѣленіе температуры внутри этого шара будетъ представлять такія сходства съ распредѣленіемъ температуры внутри земли, что многія заключенія, справедливыя для нашего шара, будутъ справедливы для земли. Впрочемъ въ послѣдствіи читатель самъ увидитъ, какъ будутъ поставлены вопросы и какія слѣдствія можно изъ нихъ извлечь.

Мы предполагаемъ, что температура поверхности нашего шара постоянна по отношенію къ времени. Мы въ правѣ сдѣлать такое предположеніе по нѣсколькимъ причинамъ.

Во-первыхъ, мы вовсе не намѣрены вычислять дѣйствительныя температуры ядра земли. Для этого намъ пришлось-бы сдѣлать цѣлый рядъ совсѣмъ произвольныхъ предположеній. Мы будемъ только доискиваться значенія климатическихъ причинъ для температуръ ядра земли.

Подъ климатомъ я здѣсь понимаю всю совокупность вліяній, которыя опредѣляютъ температуру поверхности.

Во-вторыхъ, распредѣленіе поверхностныхъ температуръ остается во время многихъ вѣковъ почти постояннымъ. Можно

всегда разсматривать термическое состояніе земли, относя начало процесса охлажденія къ тому моменту, когда извѣстное распредѣленіе температуръ поверхности было уже сходно съ современнымъ.

Въ-третьихъ, температуры поверхности дѣйствительно заключены въ тѣсные предѣлы, по крайней мѣрѣ, съ того момента, какъ органическая жизнь появилась на землѣ.

Существованіе морской фавны въ Кэмбрійскій періодъ доказываетъ, что уже въ это столь ветхое время температура водъ была или приблизительно такая, какъ въ наше время, или, въ крайнемъ случаѣ, только на нѣсколько десятковъ градусовъ выше современной. Въ такомъ случаѣ и температура дна была только немногимъ выше современной или такая-же какъ теперь. Уже въ Силурійскихъ отложеніяхъ находимъ слѣды наземныхъ растеній. Правда, что «Ольдгаміи» [1]) были отнесены болѣе строго критически относящимися къ вопросу авторами къ неорганическимъ дендритамъ, но есть и несомнѣнныя растенія въ родѣ «Psilophyton princeps» [2]). Слѣды растеній—признакъ важный. Нельзя предполагать, что онѣ произрастали въ почвѣ, которой температура была постоянно выше 50° C.

Возьмемся теперь за нашу математическую задачу:

Обозначимъ температуру посредствомъ V

» время » .... t

» разстояніе отъ центра посредствомъ.... r

Долготу, считаемую отъ 0 до 360° » .... ψ

Уголъ между полярной осью и радіусомъ, идущимъ къ данному мѣсту посредствомъ .... θ

(θ считается отъ 0 до 180°).

---

[1]) Schenk. Handbuch der Botanik, стр. 17.

[2]) Solms Laubach. Einleitung in die Paläophytologie, стр. 175.

Дальше обозначимъ коэфф. теплопроводности посредствомъ . . . . k

Коэффиціентъ теплоемкости, отнесенной къ объему посредствомъ c

Ради краткости сдѣлаемъ: $\frac{k}{c} = a^2$.

Обозначимъ радіусъ поверхности шара посредствомъ R

Предполагаемъ, что передача теплоты внутри шара совершается по законамъ теплопроводности. Аналитически это условіе выражается слѣдующимъ дифф. уравн.:

$$\frac{dV}{dt}=a^2\left[\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\cdot\frac{d^2V}{d\psi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\theta^2}+\frac{cotg\theta}{r^2}\cdot\frac{dV}{d\theta}\right] \quad (I)$$

Кромѣ того имѣются слѣдующія условія. Въ началѣ процесса, т. е. въ моментъ: $t = o$ температура внутри шара дана въ видѣ нѣкоторой функціи отъ радіуса, отъ широты и долготы:

$$V=\Pi(r,\theta,\psi) \quad \text{когда } t=o. \qquad II$$

Во-вторыхъ, въ поверхности шара температура равна нѣкоторой данной температурѣ, перемѣнной относительно мѣста, постоянной относительно времени.

$$V=f(\theta,\psi) \quad \text{когда } r=R. \qquad III$$

Пусть будетъ:

$$V = V_1 + V_2.$$

Функціи V_1 и V_2 будутъ удовлетворять дифф. уравн. I. Кромѣ того:

Для $r=R$ $V_1=f(\theta,\psi)$ $V_2=o$

Для $t=o$ $V_1=o$ $V_2=\Pi(r,\theta,\psi)$

Для $t=\infty$ $V_1=o$, но V_2 доходитъ до максимума.

Это показываетъ, что вліяніе первоначальнаго распредѣленія температуры послѣ безконечно продолжительнаго времени совсѣмъ исчезаетъ, но вліяніе поверхностныхъ условій можетъ дойти до крайняго предѣла только послѣ безконечно продолжительнаго времени.

Я долженъ здѣсь замѣтить, что у Пуассона [1]) и Жордана [2]) находится сходная задача. Эти геометры разсматриваютъ шаръ, теряющій теплоту вслѣдствіе лучеиспусканія въ среду постоянной температуры, но первоначальная температура предполагается тоже зависимой отъ всѣхъ трехъ координатъ.

Поэтому я позволяю себѣ сократить аналитическій выводъ, ибо читатель, сравнивая это рѣшеніе съ рѣшеніемъ, находящимся у вышеуказанныхъ авторовъ, легко можетъ убѣдиться въ правильности рѣшенія, а вмѣстѣ съ тѣмъ прослѣдить тѣ измѣненія, которыя мы должны были сдѣлать сообразно нѣсколько инымъ условіямъ задачи. Я обращаю вниманіе на то, что я болѣе придерживался Жордана, такъ какъ у него рѣшеніе болѣе изящно и полно.

И такъ имѣемъ:

$$V = V_1 + V_2,$$

---

[1]) Poisson. Theorie mathem. de la chaleur, § 166 и слѣд.

[2]) Jordan. Cours d'analyse, III томъ, § 334 и слѣд., § 316 и слѣд.

причемъ:

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^n - \sum_{i=1}^{i=\infty} A_{n,i}\, F_n(p_i r)\, e^{-a^2 p_{n,i}^2 t} \right\} \quad 1.,$$

$$V_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=\infty} Y_n B_{n,i} F_n(p_i r)\, e^{-a^2 p_{n,i}^2 t} \quad 2., \qquad \text{IV}$$

V_2 тождественно съ рѣшеніемъ Жордана. Разница состоитъ только въ томъ, что у насъ для $r=R$

$$F_n = o.$$

А у Жордана для $r=R$ вводится другое условіе, именно:

$$\frac{dF_n}{dr} + HF_n = o \text{ [1]}.$$

Вслѣдствіе этого въ коэффиціентахъ $B_{n,i}$ а точно также въ $A_{n,i}$ произойдутъ нѣкоторыя очевидныя перемѣны. У Жордана въ этихъ коэффиціентахъ появляется нѣкоторая величина, которую онъ обозначаетъ посредствомъ [2]) Kpp. У насъ въ выраженіи для этой величины слѣдуетъ положить: $F_n(pR)=o$.

Объяснимъ еще значеніе символовъ:

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \psi')\, P_n \sin\theta' d\theta' d\psi'. \qquad (\text{V})$$

P_n есть Лапласовъ коэффиціентъ:

$$P_n = P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\mu^2-1)}{d\mu^n},$$

---

[1]) Loc. cit., стр. 441.

[2]) Loc. cit., стр. 446.

причемъ: $\mu = \cos\theta . \cos\theta' + \sin\theta . \sin\theta' \cos(\psi - \psi')$

$$F_n(pr) = (pr)^{-1/2} J_{n+1/2} \qquad n=0, 1, 2, 3 \ldots .$$

Здѣсь $J_{n+1/2}$ обозначаетъ функцію Бесселя. Такимъ образомъ:

$$F_n(pr) = (pr)^n \varphi_n(pr), \text{ гдѣ } \varphi_n(pr) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{pr}{2}\right)^{2i}}{\Gamma_{(i+1)} . \Gamma_{(n+i+3/2)}} . \quad \text{(VI)}$$

Наконецъ:

$$A_{n,i} = \frac{2 . \int_0^R \left(\frac{r}{R}\right)^n r^2 F_n(p_i r)\, dr}{R \left[\frac{d}{dp_i} [F_n(p_i R)]\right]^2} .$$

Все это въ сущности выраженія, взятыя изъ Жордана, съ соотвѣтственными измѣненіями. Теперь мы подвинемся нѣсколько дальше. Начнемъ съ разсмотрѣнія выраженія V_1.

Во-первыхъ, замѣтимъ, что въ данномъ случаѣ коэффиціенты $A_{n,i}$ выражаются весьма просто [1]):

$$A_{n,i} = -\frac{2}{p_i \frac{dF(p_i R)}{dp_i}} . \qquad \text{(VII)}$$

Знаменатель этого выраженія всегда для $i=1$ отрицательный, для $i=2$ положительный и т. д. Слѣдовательно величины $A_{n,i}$ попеременно положительны и отрицательны.

На основаніи уравненій VII и VI можно V_1 написать подъ видомъ:

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n,i}\, \varphi_n(p_i r)\, e^{-a^2 p_i^2 t} \right\} \quad \text{IV (1) bis}$$

---

[1]) Доказательство см. Приложеніе I.

гдѣ [1]):

$$a_{n,i} = -\frac{2}{p_i \frac{d\varphi_n(p_i r)}{dp_i}}.$$

Коэффиціенты p_i даются трансцендентными уравненіями вида:

$$F_n(p_i R) = o \text{ или, что все равно, } \varphi_n(p_i R) = o.$$

Вслѣдствіе этого для $r = R$

$$V_2 = o$$

$$V = V_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n.$$

ΣY_n есть рядъ Лапласовыхъ коэффиціентовъ [2]). Согласно свойствамъ этихъ функцій и на основаніи уравненія V этотъ рядъ всюду въ поверхности шара равенъ произвольной функціи: $f(\theta, \psi)$, т. е. выражаетъ температуру поверхности.

Мы сказали выше, что для $t = o$, должно быть $V_1 = o$. Въ этомъ не трудно убѣдиться [3]), ибо:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n,i} \varphi_n(p_i r) = 1.$$

Мы должны замѣтить что выраженія вида IV (1) bis могутъ быть вычислены, такъ какъ ряды обладаютъ значительной сходимостью. Функціи F_n выражаются тригонометрическими функціями и полиномами, какъ это можно видѣть въ математическомъ приложеніи или въ любомъ учебникѣ Бесселовыхъ функцій. Коэффиціенты Лапласа есть тоже доступныя вычис-

[1]) См. Приложеніе I.

[2]) Сравн. напр. Heine. Handbuch der Kugelfunctionen.

[3]) Доказательство см. Приложеніе II.

ленію функціи. Единственное затрудненіе состоитъ въ опредѣленіи коэффиціентовъ : p. Это затрудненіе можетъ быть устранено помощью нѣкоторой теоремы о положеніи корней трансцендентныхъ уравненій вида :

$$F_n(x)=o,$$

которая состоитъ въ слѣдующемъ [1]) :

Положительные и не нулевые корни трансцендентнаго уравненія

$$F_n(x)=o$$

находятся по одиночкѣ въ квадрантахъ: $(n+2)$*омъ*, $(n+4)$*омъ*, *вообще въ* $(n+2i)$*омъ*, *гдѣ* $i=1, 2, 3, \ldots$ *При этомъ корни уравненія*:

$$F_0(x)=o$$

равны : $\pi, 2\pi, \ldots . n\pi \ldots \ldots$

Это значитъ, что первый корень уравненія : $F_n(x)=o$ меньше $(n+2)\frac{\pi}{2}$, но больше $(n+1)\frac{\pi}{2}$ и т. д. — Помощью построенія или метода «Falsi» нетрудно найти величину корня съ желаемой точностью. Для очень большихъ корней можно пользоваться замѣчаніемъ Пуассона, что очень большіе корни сказанныхъ уравненій почти совпадаютъ съ корнями уравненій:

$$\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=o.$$

Чтобы изъ этихъ корней вычислить коэффиціенты p, достаточно раздѣлить ихъ на длину радіуса внѣшней поверхности шара.

---

[1]) Док. см. Приложеніе III.

Сейчасъ увидимъ, что слѣдуетъ изъ этой теоремы. Съ этой цѣлью положимъ, что температура поверхности выражается лишь одной Лапласовой функціей порядка n, т. е. $f(\theta, \psi)$ есть цѣлая раціональная функція n-таго порядка отъ $cos\theta$, $sin\theta cos\psi$, $sin\theta sin\psi$, удовлетворяющая дифференціальному уравненію:

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du_n}{d\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2n_n}{d\psi^2} + n(n+1)u_n = o,$$

гдѣ $\mu = cos\theta$, а притомъ такая, что u_n и $\frac{du_n}{d\psi}$ для $\psi = o$ и $\psi = 2\pi$ принимаютъ тѣ-же самыя значенія[1]).

Подставимъ теперь въ формулѣ V вмѣсто $f(\theta', \psi')$ функцію вида u_n. На основаніи извѣстныхъ[2]) формулъ:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_n P_m sin\theta' d\theta' d\psi' = o \text{ когда } n \gtrless m$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} \cdot u_n \text{ когда } n = m.$$

найдемъ:

$$V_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^n u_n \left[1 - \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i F_n(p_i r) e^{-a^2 p_i^2 t}\right].$$

Чѣмъ n больше, т. е. чѣмъ выше порядокъ функціи u_n, тѣмъ коэффиціенты: p, начиная съ перваго больше, тѣмъ скорѣе погасаетъ функція:

$$\sum a_i F_{n,i} e^{-a^2 p_i^2 t}$$

[1]) Сравн. Todhunter. An Elementary treatise on Lamé. Laplace and Bessel's Functions. стр. 153.

[2]) Todhunter, loc. cit., стр. 158.

Замѣтимъ, что въ поверхности шара имѣемъ всегда

$$V = u_n,$$

а внутри его во время $t=\infty$

$$V = u_n\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

И такъ, *чѣмъ выше порядокъ гармоническаго неравенства поверхностной температуры, тѣмъ скорѣе оно стремится къ своему предѣльному вліянію внутри шара, но это предѣльное вліяніе тѣмъ сильнѣе уменьшается по мѣрѣ углубленія* [1]).

Каково физическое значеніе этой теоремы? Чѣмъ выше порядокъ Лапласовой функціи, тѣмъ быстрѣе и чаще она измѣняетъ свое значеніе въ поверхности шара. Изъ этого выводимъ заключеніе, *что вообще неравенство температуры поверхности тѣмъ скорѣе стремится къ своему предѣльному вліянію, но это вліяніе тѣмъ сильнѣе слабѣетъ съ глубиною, чѣмъ эта поверхностная температура чаще измѣняется въ поверхности шара.*

Такое заключеніе можно-бы вывести изъ общихъ началъ философіи природы. Интересно видѣть, какъ аналитическій результатъ прекрасно съ ними согласуется.

§ 5. Примѣненія.

Займемся сначала мнѣніемъ Фэя. Въ настоящее время и за многія столѣтія до него можно предполагать слѣдующее. Благодаря дѣятельности солнца, поверхность материковъ содержится въ извѣстныхъ среднихъ температурахъ, которыя вообще

[1]) Вторая часть этой теоремы слѣдуетъ изъ извѣстныхъ свойствъ гармоническихъ функцій, первая изъ найденной здѣсь теоремы о корняхъ трансцендентныхъ уравненій $F_n(x) = 0$.

понижаются отъ экватора къ полюсамъ. Температуры дна Океановъ низки, но выше, чѣмъ среднія температуры поверхности суши въ полярныхъ областяхъ.

Уже изъ основнаго положенія, что температура тѣла вполнѣ опредѣляется его первоначальной температурой и температурой поверхности, если послѣдняя извѣстна во всякое время, слѣдуетъ, что подъ дномъ Океановъ, котораго температуры вообще ниже температуръ поверхности суши въ глубинѣ температуры должны быть вообще ниже. Разсужденія, заключенныя въ § 2, показали, что поверхностныя условія не вліяютъ на сущность передачи теплоты внутри тѣла.—Если въ поверхности температура выше, то при равныхъ прочихъ условіяхъ и въ глубинѣ температура выше.

Разумѣется, въ случаѣ земли вліяніе прежнихъ условій, различія въ теплопроводности и теплоемкости породъ могутъ вызвать второстепенныя отступленія отъ общаго правила.

Съ другой стороны въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ температура поверхности суши ниже температуры дна при прочихъ равныхъ условіяхъ и въ глубинѣ температуры должны быть ниже,—насколько этому не противодѣйствуетъ сокращеніе градіента подъ поверхностью суши, на которое было указано въ § 1.

Слѣдовало-бы взять во вниманіе то обстоятельство, что поверхность суши находится нѣсколько дальше отъ центра земли, какъ дно Океановъ. Но неровности рельефа земли столь незначительны въ сравненіи съ длиною радіуса, что можно ее разсматривать какъ правильный шаръ.

Замѣтимъ еще, что тотъ слой, который находится въ непосредственныхъ отношеніяхъ со средою, вѣроятно, на днѣ моря обладаетъ большей теплопроводностью. Илы, залегающіе на днѣ, благодаря сильному давленію плотнѣе, чѣмъ рыхлая почва поверхности суши. Извѣстно, что плотныя породы лучше проводятъ теплоту.—Илы на днѣ пропитаны водою, лучше прово-

дящей теплоту, чѣмъ воздухъ, отчасти заполняющій поры въ почвѣ [1]).

Въ настоящее время дно Океановъ содержится по большей части въ температурахъ 0°—2° С. Съ какого времени установились эти температуры — неизвѣстно. Если въ какой-либо періодъ въ исторіи земли полярнымъ водамъ былъ прегражденъ доступъ въ Океаны, то вмѣстѣ съ тѣмъ температуры дна должны были быть выше. Въ Атлантическомъ Океанѣ вдоль береговъ [2]) Европы и Африки температуры дна выше 2° С. Самыя высокія температуры въ открытомъ океанѣ встрѣчаются у Тихаго вдоль береговъ Центральной Америки, Экуадара и Перу. Онѣ здѣсь доходятъ до 9° С.

Извѣстно, что средняя температура поверхности суши близка къ средней воздуха. За недостаткомъ повсемѣстныхъ наблюденій надъ первой, можно себѣ составить о ней нѣкоторое понятіе по второй. Чаще всего температура почвы нѣсколько выше, иногда нѣсколько ниже. Положительная разность иногда какъ напр., въ Нукусѣ превышаетъ 4° С., но въ виду сухого и жаркаго климата этой станціи, можно предполагать, что максимальная средняя разность немногимъ превышаетъ вышеупомянутое число. Въ Сахарѣ, въ Сѣверномъ Суданѣ средняя температура поверхности навѣрно не меньше 30° С., за то въ Якутскѣ еще въ глубинѣ двухъ метровъ имѣется —11°1 С. Судя по температурѣ воздуха, въ Сѣверо-Восточной Сибири средняя температура почвы въ иныхъ мѣстахъ, пожалуй не выше —15° С. [1]).

---

[1]) Ср. Опыты Литрова. § 1.

[2]) Ср. Berghaus's Phys. Atlas. Карты изотермовъ. Handbuch der Ozeanographie Boguslawski u. Krümmel. Atlas des Observatoriums zu Hamburg.

[1]) Здѣсь приведены температуры воздуха. Сравн. Карты Хана въ Berghaus's Atlas и Spitaler'a работу въ Denkschr. Akad. Wiss. Wien за 1886 годъ.

Неизвѣстно, каковы температуры поверхности земли вблизи полюсовъ. Замѣтимъ только, что онѣ не могутъ быть особенно низкі подъ Гренландскими и другими полярными ледяными полями. Въ этихъ пластахъ льда есть тоже несомнѣнно термическій градіентъ. Вслѣдствіе этого у основанія ледника температура во всякомъ случаѣ выше, чѣмъ въ его верхней поверхности. Бишофъ дѣлалъ наблюденія надъ температурой почвы подъ Альпійскими ледниками, но эти наблюденія дѣлались у края ледниковъ[1]), а потому остаются безъ значенія для занимающаго насъ вопроса. Онѣ впрочемъ всюду показали температуры нѣсколько выше 0° С.[2]). Такъ какъ Арктическіе и Антарктическіе ледники обладаютъ большой толщиной, а градіентъ во льдѣ меньше, чѣмъ въ породахъ почвы, то вѣроятно на днѣ ледниковъ температуры въ нѣсколько градусовъ выше, чѣмъ среднія температуры въ ихъ поверхности.

По всей вѣроятности 50° С., максимумъ 60° С. вотъ крайній предѣлъ, котораго достигаетъ разность между средними температурами разныхъ мѣстъ поверхности земли.

Температура поверхности земли можетъ быть выражена рядомъ, состоящимъ изъ Лапласовыхъ функцій. Тодгунтеръ[2]) предлагаетъ нѣкоторый способъ, помощью котораго можно изъ данныхъ для достаточно большого числа станцій прямо найти формулу. Этой формулы выводить не станемъ. Разсмотримъ нѣкоторыя неравенства температуры, отдѣльно одно отъ другого.

Возьмемъ любое гармоническое неравенство и положимъ, что поверхность шара содержится въ температурѣ:

$$A + u_n,$$

u_n выражаетъ гармоническое неравенство n-таго порядка

---

[1]) Bischof. Die Wärmelehre des Inneren unseres Planeten. Глава IX.

[2]) Todhunter. Loc. cit. стр. 200.

т. е. Лапласову функцію n-таго порядка. A есть положительная постоянная величина. Мы прибавляемъ постоянную потому, что функція u_n можетъ быть въ иныхъ мѣстахъ отрицательная. Между тѣмъ отрицательная температура есть вещь невозможная. Положимъ, что съ начала процесса охлажденія прошло уже безконечно долгое время. Тогда согласно сказанному въ § 3 вліяніе первоначальнаго распредѣленія температуры уже совсѣмъ исчезло, поверхностная температура дошла до своего предѣльнаго вліянія. Другими словами, мы мысленно переходимъ къ тому безконечно далекому будущему, когда земля утеряетъ весь запасъ собственной теплоты и ея температуры будутъ исключительно зависѣть отъ климатическихъ причинъ. Разумѣется, здѣсь дѣлается предположеніе, что климатическія условія остаются постоянными. Конечно, такой случай есть чисто идеальный, но посмотримъ, что выйдетъ изъ этого предположенія.

Согласно тому, что было сказано въ § 3, внутри шара имѣется теперь температура:

$$V = \left(\frac{r}{R}\right)^n u_n + A.$$

Возьмемъ двѣ точки въ поверхности шара, проведемъ къ этимъ точкамъ радіусы изъ центра. Если разность между температурами въ обѣихъ точкахъ поверхности шара равна x градусамъ, то въ концентрической шаровой поверхности радіуса: $r\,[r < R]$, въ тѣхъ точкахъ, гдѣ проведенные нами радіусы пересѣкаютъ эту поверхность разность температуръ будетъ:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^n x.$$

Вслѣдствіе неравномѣрнаго нагрѣтія наше тѣло не можетъ имѣть правильнаго сферическаго вида. Объемъ измѣняется съ

температурой, а потому нашъ шаръ долженъ испытать деформацію. Сначала оцѣнимъ эту деформацію менѣе строгимъ методомъ.—Положимъ, что шаръ раздѣленъ плоскостями большихъ круговъ и конусами, имѣющими вершину въ центрѣ на элементарныя пирамиды, имѣющія основанія въ поверхности шара, вершины въ его центрѣ. Положимъ, что всякая пирамида разширяется такъ, какъ будто ея боковыя стѣнки абсолютно неподвижны. Тогда пирамида на оси которой температура имѣетъ численное значеніе:

$$A+\left(\frac{r}{R}\right)^n u_n$$

разширяется такъ, какъ будто, она принадлежала-бы къ шару, разширяющемуся вслѣдствіе измѣненія температуры: A въ температуру $A+\left(\frac{r}{R}\right)^n u_n$. Изъ этого сейчасъ находимъ, что объемъ послѣ разширенія, такъ относится къ объему передъ разширеніемъ какъ:

$$1+\frac{3k\,3u_n}{n+3} : 1.$$

k есть коэффиціентъ линейнаго расширенія. Изъ этого слѣдуетъ, что разстояніе основанія пирамиды отъ центра увеличилось въ отношеніи:

$$\sqrt[3]{1+\frac{9k\,u_n}{n+3}} : 1.$$

Такъ какъ k есть малая величина, то можно вмѣсто точнаго корня взять:

$$1+\frac{3k\,u_n}{n+3}. \qquad \text{(II)}$$

Мы предположили, что коэффиціентъ расширенія посто-

янный. Возьмемъ за то большой коэффиціентъ, наприм., такой какъ для желѣза при 40° С. [1]).

$$0{,}000011.$$

Возьмемъ сначала функцію перваго порядка. Замѣтимъ, что, въ современной температурѣ поверхности земли такое неравенство существуетъ, ибо въ среднемъ южное полушаріе имѣетъ болѣе низкія температуры поверхности, какъ сѣверное; западное отъ меридіана острова Ферро болѣе низкія, какъ восточное.

Особенно рельефно выражается это неравенство, если разсматривать такъ наз. полушаріе суши, котораго полюсъ находится вблизи Лондона и полушаріе морей. Сравнимъ землю, раздѣленную на такія два полушарія съ шаромъ, поверхность котораго содержится въ температурѣ:

$$A + B.\cos\theta$$

θ считается отъ Лондонскаго полюса до противуположнаго. Отдѣляя другія слагающія температуры земной поверхности, изъ приблизительнаго вычисленія нахожу, что B не должно быть больше, какъ 5° С. т. е. всю амплитуду разностей температуры полагаемъ въ 10° С.

Тогда помощью формулы I, полагая $n=1$ а радіусъ земли равнымъ 6370000 метрамъ найдемъ, что самое большое возвышеніе деформированной поверхности надъ поверхностью шара не превышаетъ:

263 метровъ

столько-же получимъ для наибольшаго пониженія дна въ морскомъ полушаріи.

---

[1]) Jamin et Bouty Cours de Physique, II томъ, стр. 91, изд. 1883 г.

Климатическое неравенство между экваторомъ и полюсами имѣетъ гораздо большую амплитуду. Она пожалуй достигаетъ 50^0 и больше. Это есть неравенство второго порядка, поэтому $n=2$. Оказывается, что сокращеніе полярнаго радіуса противъ экваторіальнаго доходитъ до

2102 метровъ.

Большія неровности рельефа земли[1]), какъ напримѣръ обѣ Америки, Африка и Европа выражаются гармоническими сферическими функціями 4-го порядка. Соотвѣтственно неровностямъ рельефа имѣемъ неравенства температуръ того-же порядка, но амплитуда ихъ меньше, чѣмъ у неравенства второго порядка. Притомъ въ знаменателѣ формулы II будетъ теперь 7. Слѣдовательно, деформація будетъ меньше даже, чѣмъ въ первомъ примѣрѣ.

Замѣтимъ, что всѣ эти деформаціи доходятъ до максимума въ другихъ мѣстахъ земной поверхности такъ, что даже сумма ихъ нигдѣ не должна превышать крайняго предѣла деформаціи второго порядка. Впрочемъ мы только разсматривали примѣры, вовсе не желая опредѣлить какую-то дѣйствительную деформацію, хотя въ виду того, что эти отступленія очень незначительны, употребленный здѣсь способъ вычисленія далъ-бы очень точные результаты.

Изъ этихъ примѣровъ видно, что развѣ въ случаѣ, когда коэффиціенты расширенія веществъ внутри земли несравненно больше коэффиціента расширенія желѣза, могутъ получиться болѣе крупные результаты.

Мы предположили, что время, истекшее съ того момента, какъ началась реакція климатическихъ условій на температуры

---

[1]) G. H. Darwin. Phil. Trans. Vol. 173, Part. I, стр. 228. On the stresses due to the weight of Continents.

ядра земли безконечно длинно. Между тѣмъ погасаніе старыхъ, и возрастаніе новыхъ неравенствъ идетъ крайне медленно. Мы сейчасъ скажемъ нѣсколько словъ о скорости погасанія, теперь-же замѣтимъ, что неравенства высокихъ порядковъ хотя и скоро погасаютъ и взаимно быстро стремятся къ предѣльному своему вліянію, но за то проникаютъ не глубоко[1]. Изъ нашей простой формулки (I) сейчасъ видно, что деформація «ceteris paribus» все уменьшается по мѣрѣ увеличенія числа: n. Въ виду всего этого и не стоитъ пускаться въ строгое аналитическое изслѣдованіе этихъ деформацій.

Когда время, истекшее съ того момента, какъ началось вліяніе извѣстнаго неравенства температуры поверхности, есть конечная величина, то неравенство температуры порядка n внутри шара выражается слѣдующимъ образомъ:

$$u_n\left(\frac{r}{R}\right)^n(1-s_n)\cdot$$

Эта формула написана по образцу формулы IV bis (1), причемъ,

$$s_n=\sum_{i=1}^{i=\infty}a_{n,i}\,\varphi_n(p_i r)\,e^{-a^2p_i^2t}.$$

Если предположить, что первоначальная температура была функціей отъ одного лишь радіуса, то кромѣ общаго сокращенія объема появится только деформація, вызванная неравенствомъ температуры n-таго порядка.

Посмотримъ скоро-ли погасаетъ s_2, т. е. рядъ, выражающій погасаніе неравенства второго порядка. Съ этой цѣлью

---

[1]) *Примѣчаніе.* Во избѣжаніе многорѣчія мы позволили себѣ выразиться не совсѣмъ точно.

нужно разсмотрѣть коэффиціенты: $a_i p_i^2$. $p_i = \frac{\eta_i}{R}$, гдѣ η_i есть *i*-тый, неравный нулю положительный корень трансцендентнаго уравненія:

$$\varphi_2(\eta) = o. \qquad \text{II}$$

Замѣтимъ сначала, что при единицахъ: времени — годъ, длины—одинъ англійскій футъ по Томсону[1]):

$$a^2 = \frac{k}{c} = 400$$

R, радіусъ земли въ футахъ, круглымъ счетомъ:

$$20,000,000.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{a^2}{R^2} = \frac{1}{10^{12}}$$

Эта постоянная независитъ отъ единицъ длины, ея измѣренія суть:

$$T^{-1}$$

гдѣ T обозначаетъ время, поэтому ее можно употребить и тогда, когда единицей длины взятъ метръ, лишь бы единицей времени остался годъ.

Корни уравненія: II находятся въ четвертомъ, шестомъ и т. д. квадрантахъ. Первый близокъ къ 5,8 второй къ 9 и т. д. Очевидно скорость погасанія увеличится, если возьмемъ вмѣсто перваго корня: 2π вмѣсто второго 3π и т. д.

---

[1]) Cooling of the Earth loc. cit. стр. 476.

тогда:

$$e^{-a^2 p_1^2 t} = e^{-\frac{\pi^2}{10^{12}} 4t}$$

$$e^{-a^2 p_2^2 t} = e^{-\frac{\pi^2}{10^{12}} 9t}$$

$$e^{-a^2 p_3^2 t} = e^{-\frac{\pi^2}{10^{12}} .16t},$$

. . . .

. . . .

Когда $t=o$, то всѣ: $e^{-a^2 p^2 t}$ принимаютъ значеніе: 1. Пусть $t=100,000,000$ лѣтъ. Тогда:

$$e^{-a^2 p_1^2 t} = 0,996\ldots.$$

$$e^{-a^2 p_2^2 t} = 0,991\ldots.$$

$$e^{-a^2 p_3^2 t} = 0,982\ldots.$$

. . . .

Изъ этого видно, что послѣ ста милліоновъ лѣтъ рядъ s_2 будетъ еще имѣть значеніе очень близкое къ первоначальному, только самые далекіе члены ряда уже исчезнутъ.

Первоначальное значеніе ряда s_2 — есть — 1. Теперь оно будетъ меньше, насколько, это трудно оцѣнить не дѣлая вычисленія. Между тѣмъ изъ приведенныхъ данныхъ видно, что нужно взять въ разсчетъ многіе члены ряда. Но изъ найденныхъ здѣсь числовыхъ величинъ для

$$e^{-a^2 p_i^2 t}$$

. . . . . .

видно, что этотъ рядъ погасаетъ весьма медленно. Сто милліо-

новъ лѣтъ для него — незначительный промежутокъ времени. Изъ нашего вычисленія коэффиціента $\frac{a^2}{R^2}$ ясно видно, что такой медленностью погасанія онъ обязанъ только тому, что R есть очень большая величина.

Но если s_2 погасаетъ столь медленно, то даже послѣ 100,000,000 лѣтъ вліяніе климатическаго неравенства ограничивается только внѣшней оболочкой земли. Мы взяли число: 100,000,000 безъ никакой задней мысли. Мы вовсе не желаемъ утверждать, что климатическое неравенство между экваторомъ и полюсомъ существуетъ сто милліоновъ лѣтъ. Число было взято единственно ради примѣра. Конечно, еслибъ взять во вниманіе неравенство высокаго порядка, то оказалось бы, что s_n погасаетъ несравненно скорѣе. Но мы уже знаемъ, что, чѣмъ выше порядокъ неравенства, тѣмъ вліяніе его падаетъ сильнѣе по мѣрѣ углубленія. Мы уже прежде показали, что окончательныя деформаціи высокаго порядка меньше окончательныхъ деформацій низкаго порядка.

Выше было замѣчено, что амплитуда неравенства температуры между полюсомъ и экваторомъ есть самая большая, а потому и соотвѣтственная деформація должна быть довольно значительная. На первый взглядъ казалось-бы, что будучи пожалуй самымъ древнимъ, неравенство температуры между полюсомъ и экваторомъ должно быть наиболѣе рѣзко выражено въ термическомъ состояніи земли. Геологическія данныя до нѣкоторой степени подтверждаютъ этотъ взглядъ. Въ Силурійское время климатическіе поясы оказываютъ сходство съ современными. Начиная съ Юрской эпохи до современной климатическіе поясы очевидно расположены концентрически вокругъ теперешнихъ полюсовъ [1]). Но, какъ замѣчаетъ Неймайръ, въ

---

[1]) M. Neumayr. Ueber Klimat. Zonen. Denkschr. Akad. Wiss. Wien. 1883 г.

промежуточныя эпохи трудно прослѣдить такое расположеніе, особенно-же рѣзко отличаются климатическія отношенія въ каменно-угольную эпоху показывающую слѣды удивительнаго однообразія климата. Съ другой стороны Ваагенъ [1]) и нѣкоторые другіе геологи утверждаютъ, что въ каменно-угольную эпоху значительная часть поверхности земли, теперь находящаяся подъ тропиками, находилась въ условіяхъ совсѣмъ сходныхъ съ условіями, господствовавшими въ сѣверномъ полушаріи въ ледниковую эпоху. Мы восве не желаемъ разбирать это мнѣніе, но позволимъ себѣ сдѣлать замѣчаніе, что большія дислокаціи способны вызвать перемѣщеніе земли относительно ея оси вращенія. Между тѣмъ направленіе оси остается постояннымъ въ пространствѣ [2]) относительно солнечной системы.

И такъ является сомнительнымъ, существуетъ ли это неравенство постоянно съ самаго начала существованія земли.

Мы уже не говоримъ о томъ, что измѣненія въ распредѣленіи суши и моря, въ направленіи теченій, воздушныхъ и морскихъ измѣняютъ условія и опять ослабляютъ вліяніе этого неравенства.

И такъ деформація, вызванныя современными неравенствами температуръ поверхности равно какъ и тѣ, которыя были вызваны въ прошедшемъ другимъ распредѣленіемъ суши и моря или «ab initio» существовавшими неравенствами въ распредѣленіи температуры внутри земли, всѣ заключены въ тѣсные предѣлы. Въ сравненіи съ общимъ сокращеніемъ объема земли вслѣдствіе охлажденія, онѣ являются второстепенными факторами. Однако онѣ дѣйствуютъ въ пользу сохраненія существующихъ условій, ибо все таки дно Океановъ должно немножко скорѣе понижаться какъ поверхность суши.

---

[1]) Waagen. Carbone Eiszeit Jahrb. der k. k. Geol. Reichsanst. 1887 г.

[2]) Thomson et Tait. Treat. on Nat. Phil. § 108.

Дависонъ и Дарвинъ разбирали вопросъ общаго сокращенія объема земли [1]). Изслѣдованія этихъ ученыхъ имѣли цѣлью разъяснить образованіе складокъ въ земной корѣ. Слѣдуя по пути, указанномъ Дарвиномъ, можно разобрать вліяніе неравенствъ температуры на образованіе складокъ. Но эффектъ ихъ будетъ несравненно меньше, главнымъ образомъ потому, что амплитуда неравенствъ температуры несравненно меньше амплитуды общаго паденія температуры. Дѣйствительно, еслибъ даже температура ядра земли нигдѣ не превышала температуры плавленія лавы при атмосферномъ давленіи, то еще амплитуда общаго паденія температуры была-бы больше 1000° С. т. е. въ 20 разъ по крайней мѣрѣ больше, какъ амплитуда самаго крупнаго климатическаго неравенства.

Потомъ, всѣ эти неравенства измѣнчивы и непостоянны; общее пониженіе температуры постоянно и древнѣе всѣхъ неравенствъ. Чѣмъ выше порядокъ неравенства, тѣмъ сильнѣе оно слабѣетъ по мѣрѣ углубленія. Это тоже уменьшаетъ эффектъ неравенствъ.

И такъ неравенства температуры производятъ нѣкоторыя деформаціи, но благодаря тому, что ихъ амплитуда по отношенію къ такому громадному шару, какъ земля, слишкомъ малы, ихъ вліяніе совсѣмъ незначительно, хотя и дѣйствуетъ въ пользу поддержанія существующаго распредѣленія суши и моря. Поэтому нельзя относить на ихъ счетъ какихъ-либо болѣе значительныхъ деформацій, развѣ въ томъ случаѣ, когда онѣ дѣйствуютъ въ продолженіе неимовѣрно долгихъ періодовъ времени.

Вслѣдствіе неоднородности земного шара эффектъ общаго сокращенія объема сосредоточивается въ извѣстныхъ областяхъ. Тоже самое случается и съ эффектомъ неравенствъ температуры. Тогда очевидно мѣстный эффектъ будетъ больше.

---

[1]) Phil. Trans. за 1887 годъ.

Результаты § 3, могутъ быть примѣнены къ рѣшенію одного вопроса, возбужденнаго Дарвиномъ. Въ одной изъ своихъ работъ [1]) онъ спрашиваетъ какія гармоническія неравенства погасаютъ скорѣе. Ему показалось, что неравенства высокаго порядка должны погасать медленнѣе, но онъ говоритъ сейчасъ [2]) «только анализъ можетъ разрѣшить этотъ вопросъ».

Мы нашли, что неравенства высокаго порядка погасаютъ скорѣе.

Г. Г. Дарвинъ хотѣлъ узнать, что само по себѣ болѣе прочно гора-ли, горный хребетъ, или материкъ. Если принять, что неравенства высокаго порядка погасаютъ скорѣе, то выходитъ, что материкъ; если, какъ это показалось Дарвину, принять, что медленнѣе, то выходитъ наоборотъ, что горный хребетъ прочнѣе.

Наши результаты показываютъ, что материки прочнѣе. Это слѣдуетъ понимать въ слѣдующемъ смыслѣ: если разсматривать неровности рельефа земли, какъ произведенія нѣкоторыхъ внутреннихъ силъ, то материки по существу своему болѣе прочны, менѣе склонны обрушиться или провалиться, какъ горные хребты.

---

[1]) On bodily tides. Phil. Trans. London 170, часть I, стр. 27.

[2]) «Only analysis would tell us.».

Математическія приложенія:

I. Слѣдуетъ доказать, что:

$$A_{n,i} = -\frac{2}{p_i \frac{dF_n(pR)}{dp}}.$$

когда извѣстно, что:

$$A_{n,i} = \frac{2\int_0^R \left(\frac{r}{R}\right)^n r^2 F_n(pr)\,dr}{R\left[\frac{dF_n}{dp}(pR)\right]^2},$$

и что:

$$F_n(p_i r) = o \quad \text{когда} \quad r = R.$$

Пусть

$$pr = x$$
$$pR = z$$

наконецъ [1]):

$$F_n(x) = x^{-1/2} J_{n+1/2} = x^n \varphi_n(x). \qquad \text{I}$$

Тогда:

$$A_{n,i} = \frac{2\int_0^{pR} x^{n+2} F_n(x)\,dx}{z^{n+3}\left[\frac{dF_n(z)}{dz}\right]^2}.$$

---

[1]) Ср. формулы VI въ § 4.

Пусть:

$$u_n = x^{n+1} F_n = x^{n+1/_2} J_{n+1/_2}, \qquad \text{II}$$

тогда:

$$\int x^{n+2} F_n dx = \int x u_n dx,$$

u_n очевидно дѣлается равно нулю вмѣстѣ съ F_n. Съ другой стороны, изъ извѣстнаго отношенія [1]) между функціями Бесселя:

$$J_{m-1} = \frac{m}{x} J_m + \frac{dJ_m}{dx},$$

когда $m = n + 1/_2$ слѣдуетъ:

$$F_{n-1} = (n+1)\frac{F_n}{x} + \frac{dF_n}{dx}. \qquad \text{III}$$

Изъ этого опять слѣдуетъ помощью формулъ: II

$$\frac{du_{n+1}}{dx} = x u_n,$$

отсюда:

$$\int x u_n dx = u_{n+1} + C.$$

У насъ интегралъ долженъ быть взятъ отъ $x = o$, до $x=z$, но для $x=o$ $u_n=o$, слѣдовательно $C=o$.

И такъ

$$\int_0^z x^{n+2} F_n dx = \int_0^z x u_n dx = u_{n+1}(z) = z^{n+2} F_{n+1}(z). \qquad \text{IV}$$

Изъ извѣстнаго отношенія между функціями Бесселя:

$$J_{m+1} = \frac{m}{x} J_m - \frac{dJ_m}{dx},$$

[1]) Ср. Todhunter, loc. cit., 297 стр.

когда $m = n + {}^1/_2$ слѣдуетъ:

$$F_{n+1} = \frac{n}{x} F_n - \frac{dF_n}{dx},$$

для $x = z$ (т. е. $r = R$) $F_n = o$, а потому:

$$\frac{dF_n}{dz} = - F_{n+1}.$$

Помощью формулъ IV и V сейчасъ находимъ:

$$A_{n,i} = \frac{2}{z\, F_{n+1}(z)}.$$

А по V обратно:

$$A_{n,i} = - \frac{2}{z \,.\, \frac{dF_n(z)}{dz}}.$$

наконецъ, такъ какъ

$$z = pR$$

$$A_{n,i} = - \frac{2}{p \frac{dF_n(pR)}{dp}}.$$

что и требуется доказать.

$A_{n,i}$ состоитъ коэффиціентомъ при $F_n(p_i r)$, но:

$$F_n(pr) = (pr)^n.\ \varphi^n(pr)$$

$$\frac{dF_n(pR)}{dp} = (pR)^n.\ \frac{d\varphi^n(pR)}{dp} + n(pR).\overset{n-1}{R}\varphi^n(pR),$$

но

$$\varphi_n(pR) = o,$$

слѣдовательно:

$$A_{n,i}\ F_n(pr) = \left(\frac{r}{R}\right)^n a_{n,i}\ \varphi_n(pr),$$

гдѣ:

$$a_{n,i} = -\frac{2}{p\dfrac{d\varphi_n(pR)}{dp}}.$$

Такимъ образомъ справедливость формулы IV (1) bis въ § 4 вполнѣ доказана.

Приложеніе II.

Слѣдуетъ доказать, что

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n,i}\ \varphi_n(p_i r) = 1. \qquad \text{I}$$

Вспомнивъ, что:

$$a_{n,i} = -\frac{2}{p_i\dfrac{d\varphi_n(p_i R)}{dr}},$$

можемъ написать:

$$2\sum_{i=1}^{i=\infty} -\frac{\varphi_n(p_i r)}{p_i\dfrac{d\varphi_n(p_i R)}{dp_i}} = 1.$$

Этотъ рядъ есть сумма дѣйствительныхъ остатковъ (residus) интеграла:

$$Z = -\frac{2}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{\varphi_n(zr)}{z\varphi_n(zR)}\,dz, \qquad \text{II}$$

для полюсовъ:

$$z = p_i.$$

Контуръ интеграціи есть замкнутый, онъ долженъ обнимать всю область, лежащую на лѣвой сторонѣ оси y, такъ какъ всѣ положительные корни входятъ въ составъ ряда: I. Мы должны тоже исключить точку, $z=o$, такъ какъ нулевые корни не входятъ въ рѣшеніе.

Отправимся по слѣдующему контуру, по оси y отъ $y=+\infty$ до $y=-\infty$ обходя точку $z=o$ по маленькому полукругу, потомъ по полукругу безконечнаго радіуса отъ $y=-\infty$ до $y=+\infty$. Сообразно съ этимъ возьмемъ:

$$x = \rho \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\theta$$

Такъ какъ

$$\varphi_n(pr) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{pr}{2}\right)^{2i}}{\Gamma_{(i+1)}\,\Gamma_{(i+n+{}^3/_2)}},$$

то теперь

$$\varphi_n = s + \sqrt{-1}\, q,$$

гдѣ:

$$\left.\begin{aligned} s &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{\rho r}{2}\right)^{2i} \cos 2i\theta}{\Gamma_{(i+1)}\,\Gamma_{(i+n+{}^3/_2)}} \\ q &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{\rho r}{2}\right)^{2i} \sin 2i\theta}{\Gamma_{(i+1)}\,\Gamma_{(i+n+{}^3/_2)}} \end{aligned}\right\} \quad \text{III}$$

Такъ какъ въ знаменателѣ интеграла Z появились мнимыя выраженія, то освободимъ его отъ этихъ мнимыхъ величинъ. Послѣ очевидныхъ преобразованій найдемъ:

$$Z = -\left[\frac{1}{\pi}\int\frac{sS+qQ}{S^2+Q^2}\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int\frac{qS-Qs}{S^2+Q^2}\,\frac{d\rho}{\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\frac{sS+qQ}{S^2+Q^2}\,\frac{d\rho}{\rho} - \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\frac{Sq-Qs}{S^2+Q^2}\,d\theta\right],$$

S и Q суть тѣ-же s и q, только r замѣнено буквой R.

Сумма нашего ряда равна дѣйствительной части интеграла Z, но изъ двухъ дѣйствительныхъ интеграловъ одинъ относится только къ линіи: ρ другой только къ линіи: θ.

Но на линіи ρ или на оси y $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\theta = -\frac{\pi}{2}$ вслѣдствіе этого всѣ $\sin 2i\theta = o$, а потому:

$$s = o$$

$$S = o$$

Такимъ образомъ весь второй интегралъ равенъ нулю. Возьмемъ первый интегралъ по маленькому полукругу, обходящему точку $z=o$.

Для $z=o$, $\rho=o$, $s=o$, $S=o$

$q=1$, $Q=1$

Слѣдовательно будетъ:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi. \qquad \text{IV}$$

Интегралъ по полукругу безконечнаго радіуса идетъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Мы сейчасъ покажемъ, что онъ стремится къ предѣлу *нуль*, когда ρ увеличивается до безконечности.

Изъ формулъ III видно, что относительно θ, функція b

есть нечетная, s четная. Поэтому интегралъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Ss+qQ}{S^2+Q^2}\, d\theta$$

есть четный, а потому можно вмѣсто него взять интегралъ:

$$2. \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Ss+Qq}{S^2+Q^2}\, d\theta\,,$$

Замѣтимъ, что.

$$\varphi_n = \frac{F_n}{x^n} = \frac{(X_n \sin x - X_n' \cos x)}{x^{2n+1}}\,, \qquad \text{V}$$

гдѣ X_n X_n' есть полиномы порядка n и $n-1$ или наоборотъ.

Подставляя:

$$x = r.\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\,,$$

получимъ новыя выраженія для s и q, состоящія изъ нѣкоторыхъ полиномовъ, изъ тригонометрическихъ и гиперболическихъ синусовъ и косинусовъ. Подставляя эти выраженія въ формулу: V, приводя въ порядокъ и т. д. увидимъ что, когда ρ очень велико, нашъ интегралъ будетъ почти равенъ интегралу

$$2\,\frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e.^{\rho(r-R)\sin\theta} \cos[\rho(r-R)\cos\theta]\, d\theta$$

но этотъ интегралъ пока $r < R$ стремится къ нулю когда ρ возрастаетъ до безконечности.

Такимъ образомъ дѣйствительная часть интеграла Z согласно формулѣ IV будетъ

$$\frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

что и требуется доказать.

Приложеніе III.

Слѣдуетъ доказать, что корни положительные, не нулевые трансцендентнаго уравненія:

$$F_n(x) = o$$

находятся въ $(n+2i)$-хъ квадрантахъ, причемъ

$$i = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

Относительно корней этого уравненія извѣстно только то, что было найдено Пуассономъ [1]). Онъ, собственно говоря, занимался уравненіемъ

$$J_m(x) = o,$$

гдѣ J_m есть Бесселова функція. Но въ виду того, что:

$$F_n = x^{-1/2} J_{n+1/2}(x),$$

очевидно, положительные и не нулевые корни этихъ уравненій тождественны, коль скоро:

$$m = n + 1/2.$$

Пуассонъ замѣтивъ, что, когда x очень велико въ сравненіи съ n, то дифференціальное уравненіе, которому удовле-

[1]) Todhunter, loc. cit., стр. 312 и слѣд.

творяетъ функція Бесселя, можетъ быть приблизительно замѣнено уравненіемъ:

$$\frac{d^2 J_m(\sqrt{x})}{dx^2} + J_m(\sqrt{x}) = o,$$

нашелъ для него тоже приблизительный интегралъ:

$$J_m = \frac{2}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что большіе корни уравненія:

$$F_n(x) = o$$

приблизительно такіе-же, какъ корни уравненія

$$\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = o.$$

У функцій F_n, входящихъ въ наше рѣшеніе указатель n есть или 0 или цѣлое положительное число. Эти функціи могутъ быть написаны подъ различными видами:

$$F_n(x) = x^{-1/2} J_{n+1/2}(x). \qquad \text{I}$$

$J_{n+1/2}$ есть функція Бесселя[1]) или функція

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1/2+2i}}{\Gamma_{(i+1)} \Gamma_{(n+i+3/2)}}. \qquad \text{II}$$

Съ другой стороны можно написать:

$$F_n(x) = \frac{C[X_n \sin x - X'_n \cos x]}{x^{n+1}}. \qquad \text{III}$$

---

[1]) Jordan, loc. cit., стр. 441.

C есть нѣкоторая постоянная [положительная],

$$X_n = 1 - \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_4}{4!}x^4 - \ldots .$$

$$X'_n = x - \frac{A_3}{3!}x^3 + \frac{A_5}{5!}x^5 - \ldots .$$

причемъ:

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = 1$$

$$A_{i+1} = A_i \frac{2.(n-i)}{2n-i}$$

X^n и X'_n суть полиномы. Когда n четно, то полиномъ: X_n оканчивается членомъ:

$$(\sqrt{-1})^n \frac{A_n}{n!} x^n ,$$

а полиномъ: X'_n оканчивается членомъ:

$$(\sqrt{-1})^{n-2} \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} .$$

Когда n есть нечетное число, то X_n оказывается членомъ:

$$(\sqrt{-1})^{n-1} \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} ,$$

а полиномъ X'_n оканчивается членомъ:

$$(\sqrt{-1})^{n-1} \frac{A_n}{n!} x^n .$$

Подъ видомъ: III функціи: F_n являются, кажется, въ первый разъ у Пуассона[1]). Въ своемъ изслѣдованіи онъ взялъ

[1]) Poisson, loc. cit., § 81 и слѣд.

собственно говоря функцію: $x^{-n} F_n$, вслѣдствіе чего въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи вводитъ множитель: x^n. Впрочемъ видъ: III хорошо извѣстенъ.

Изъ формулы: I видно, что уравненіе:

$$F_n(x) = o \quad \text{гдѣ } n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

имѣетъ n нулевыхъ корней. Этими нулевыми корнями вовсе не будемъ заниматься, такъ какъ они не входятъ въ рѣшеніе. $J_{n+1/2}$ для отрицательныхъ значеній перемѣнной дѣлается мнимымъ, но этого не случается съ F_n. Но такъ какъ:

$$F_n = C x^n [1 - ax^2 + \ldots\ldots$$

т. е. рядъ въ скобкахъ включаетъ только четныя степени перемѣнной, то отрицательные корни уравненія:

$$F_n = o$$

равны по абсолютной величинѣ положительнымъ. Впрочемъ насъ интересуютъ только положительные корни этого уравненія. А потому можно сказать, что корни этого уравненія суть тѣ-же, что корни уравненія:

$$J_{n+1/2} = o. \qquad \text{IV}$$

Съ другой стороны изъ формулы III видно, что занимающіе насъ положительные корни равны корнямъ трансцендентнаго уравненія:

$$X_n \sin x - X'_n \cos x = o. \qquad \text{V}$$

Мы будемъ пользоваться, смотря по обстоятельствамъ, то тѣмъ, то другимъ видомъ уравненія. Во избѣжаніе постоянныхъ оговорокъ замѣтимъ, что впослѣдствіи будемъ говорить о *не нулевыхъ положительныхъ корняхъ уравненія*

$$F_n(x) = o,$$

Начнемъ разсужденіе съ нѣсколько болѣе общаго случая. Замѣтимъ, что всегда

$$J_m = \frac{x^m}{2^m \Gamma_{(m+1)}} \varphi_m(\theta). \qquad \text{VI}$$

$$\theta = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\varphi_m(\theta) = 1 - \frac{\theta}{m+1} + \frac{\theta^2}{1.2.(m+1)(m+2)} -$$

Отсюда легко вывести слѣдующія дифференціальныя уравненія, въ которыхъ, число знаковъ $'$ показываетъ порядокъ производной по θ:

$$\begin{aligned} \varphi_m + (m+1)\,\varphi'_m + \theta\varphi''_m &= o \\ \varphi'_m + (m+2)\,\varphi''_m + \theta\varphi'''_m &= o \\ \varphi''_m + (m+3)\,\varphi'''_m + \theta\varphi^{\text{IV}}_m &= o \qquad \text{VII} \end{aligned}$$

. . . .

. . . .

На основаніи этихъ уравненій, Тодгунтеръ [1]) показываетъ, что корни уравненія:

$$\varphi_m(\theta) = o$$

всѣ дѣйствительны и положительны. Число ихъ безконечно.

Дальше изъ этихъ уравненій слѣдуетъ, что это уравненіе не имѣетъ многократныхъ корней, ибо коль скоро $\varphi'_m = o$ вмѣстѣ съ $\varphi_m = o$, то и всѣ остальныя производныя равны нулю. Слѣдовательно корни или однократны или многократны безконечное число разъ. Очевидно, второе допущеніе невозможно. Дальше,

---

[1]) Loc. cit., стр. 307. Собственно говоря, выводъ принадлежитъ Фурье.

изъ уравненій VII сейчасъ видно, что первая производная отъ φ_m по θ и φ_{m+1} въ сущности одно и тоже. Дѣйствительно

$$\varphi_{m+1} = -A.\frac{d\varphi_m}{d\theta}, \qquad \text{VIII}$$

гдѣ A есть постоянная.

На основаніи этого замѣчанія все, что было сказано объ отношеніяхъ φ_m къ производнымъ, справедливо для функцій φ_m разнаго порядка. — Замѣтимъ, что такъ какъ по опредѣленію.

$$\varphi_m = 1 - \frac{\theta}{m+1} + \frac{\theta^2}{(m+1)(m+2)} - \qquad \text{IX}$$

то

$$\varphi_\infty = 1 \qquad \text{X}$$

пока θ имѣетъ конечныя значенія. Помощью этого замѣчанія легко доказать, что φ_{m+1} дѣлается равно нулю въ первый разъ лишь послѣ того, какъ φ_m сдѣлалось равнымъ нулю въ первый разъ.

Дѣйствительно, послѣ точки $\theta = o$ всѣ функціи φ_m сначала имѣютъ тотъ самый знакъ. Положимъ, что φ_m еще не сдѣлалось равнымъ нулю, а φ_{m+1} или, что все равно $\frac{d\varphi_m}{d\theta}$ уже дѣлается равнымъ нулю въ первый разъ послѣ точки $\theta = o$.

Изъ уравненій VII слѣдуетъ, что въ этотъ моментъ

$$\varphi_m \text{ и } \varphi_{m+1} \text{ т. е. } \varphi_m \text{ и } \frac{d^2\varphi_m}{d\theta^2}$$

должны имѣть противный знакъ. Но φ_m еще не мѣняло знака, а потому φ_{m+2} должно было перемѣнить знакъ раньше чѣмъ φ_{m+1}. Переходя къ слѣдующему уравненію изъ системы VII увидимъ, что въ такомъ случаѣ φ_{m+3} должно было еще раньше измѣнить знакъ.—Продолжая такимъ образомъ дойдемъ до

φ_∞, которое, какъ выше было замѣчено, имѣетъ постоянное значеніе: 1 пока θ конечно, а потому не можетъ сдѣлаться равнымъ нулю прежде функцій низкаго порядка. И такъ φ_{m+1} *дѣлается въ первый разъ равно нулю, лишь послѣ того, какъ φ_m сдѣлалось равно нулю послѣ точки $\theta=o$.*

Тоже самое относится къ $\frac{d\varphi_m}{d\theta}$; къ J_m, такъ какъ всѣ эти функціи дѣлаются одновременно равны нулю.

Изъ прежнихъ разсужденій уже оказалось, что корни уравненій разнаго порядка другъ отъ друга различны.

До сихъ поръ мы полагали m какимъ угодно, хотя положительнымъ числомъ, теперь перейдемъ къ спеціально насъ интересующему случаю, когда $m=n+{}^1/_2$, гдѣ

$$n=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots\ n\ldots\ldots$$

Мы будемъ разсматривать функціи: $J_{n+{}^1/_2}$ или, что все равно F_n подъ видомъ III. Тогда корни уравненій:

$$J_{n+{}^1/_2}=o \quad F_n=o$$

совпадаютъ съ корнями уравненія:

$$\frac{X_n}{X'_n}-cotg\,x = o. \qquad \text{XI}$$

Припомнимъ, что:

$$X_n = 1-\frac{A_2}{2!}x^2+\frac{A_4}{4!}x^4-\ldots\ldots$$

$$X'_n = x\{1-\frac{A_3}{3!}x^2+\frac{A_5}{5!}x^4-\ldots\ldots$$

$$A_{i+1}=A_i\,\frac{2.(n-i)}{2n-i} \qquad A_0=1 \quad A_1=1.$$

Полиномъ X_n когда $n=2i$ имѣетъ i корней $x^2=a_1^2$, $x^2=a_2^2\ldots\ldots$

» X'_n » » » » $i-1$ » $x^2=b_1^2$, $x^2=b_2^2\ldots\ldots$

и кромѣ того корень: $x=o$.

Когда $n=2i+1$ оба полинома имѣютъ i корней:

$$x^2=a_1^2\ldots\ldots \quad x^2=b_1^2\ldots\ldots$$

кромѣ того X_n' имѣетъ корень: $x=o$.

А потому:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \prod_{\mu=1}^{\mu=i}\left(1-\frac{x^2}{a_\mu^2}\right) && \text{когда } n=2i \\ & && \quad\text{»}\quad n=2i+1 \\ X_n' &= x\prod_{\mu=1}^{\mu=i-1}\left(1-\frac{x^2}{b_\mu^2}\right) && \text{когда } n=2i \\ X_n' &= x\prod_{\mu-1}^{\mu=i}\left(1-\frac{x^2}{b_\mu^2}\right) && \text{когда } n=2i+1 \end{aligned}\right\} \text{XII}$$

Во всемъ промежуткѣ отъ $x=o$ до $x=+\infty$ множитель x не имѣетъ вліянія на знакъ, а потому не будемъ больше обращать на него вниманія.

Положимъ что x^2 сдѣлалось больше наибольшаго изъ корней a^2 и b^2. Тогда всѣ множители въ произведеніяхъ вида XII будутъ отрицательны, а потому частное:

$$\frac{X_n}{X_n'}$$

будетъ постоянно положительное, когда число производителей въ числителѣ и знаменателѣ одинаково, т. е. когда n *нечетно*, напротивъ того, оно постоянно отрицательно, когда n *четно*, ибо тогда число производителей въ числителѣ и знаменателѣ различается на единицу. Но котангенсъ имѣетъ положительныя значенія въ *нечетныхъ*, отрицательныя въ четныхъ квадрантахъ. Корни уравненія XI есть абсциссы точекъ пересѣченія кри-

выхъ: $\frac{X_n}{X'_n}$ и $cotgx$. Изъ только что сказаннаго слѣдуетъ что при $n=2i+1$, пересѣченія этихъ кривыхъ могутъ имѣть абсциссы только въ нечетныхъ квадрантахъ, при $n=2i$ только въ четныхъ.—И такъ, *послѣ того какъ частное*:

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

въ послѣдній разъ перемѣнило свой знакъ, кривая:

$$\frac{X_n}{X'_n}\ cotgx, \quad \textit{а за ней} \quad J_{n+{}^1/_2} \quad \textit{и} \quad F_n$$

мѣняютъ знакъ только въ нечетныхъ квадрантахъ, если n нечетно, только въ четныхъ если n четно.

Замѣтимъ, что пока n есть величина конечная, полиномы: X_n и X'_n очевидно не могутъ имѣть безконечно большихъ корней.

Теперь предположимъ, что, если F_{n-1} $(J_{n-{}^1/_2})$ дѣлается въ первый разъ равно нулю въ $(n+1)$-омъ квадрантѣ и послѣ того, какъ частное: $\frac{X_{n-1}}{X'_{n-1}}$ въ послѣдній разъ перемѣнило знакъ, если F_n дѣлается въ первый разъ равно нулю въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ и послѣ того какъ $\frac{X_n}{X'_n}$ въ послѣдній разъ перемѣнило знакъ; то непремѣнно функція F_{n+1} $(J_{n+{}^3/_2})$ въ первый разъ мѣняетъ знакъ въ $(n+3)$-емъ квадрантѣ и послѣ того, какъ $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ въ послѣдній разъ мѣняетъ знакъ. Потомъ мы докажемъ, что функціи: F_1, F_2 мѣняютъ знакъ въ первый разъ, первая въ 3-емъ, вторая въ четвертомъ квадрантѣ и послѣ того какъ $\frac{X_1}{X'_1}$ и $\frac{X_2}{X'_2}$ въ послѣдній разъ измѣнили знакъ. Изъ этого уже можно вывести, что наше положеніе справедливо для всѣхъ прочихъ функцій.

Доказательство для того случая когда n четно, немножко различается отъ того, которое дѣлается при n нечетномъ. Мы приведемъ только первое, ибо читатель самъ легко замѣтитъ, какія измѣненія слѣдуетъ сдѣлать для n нечетнаго.

Мы только что доказали, что послѣ того, какъ: $\frac{X_n}{X'_n}$ въ послѣдній разъ измѣнило знакъ, корни уравненія:

$$F_n = o$$

находятся въ четныхъ квадрантахъ если n четно, въ нечетныхъ если n нечетно. Слѣдовательно въ данномъ случаѣ, согласно нашему предположенію. F_{n+1} мѣняетъ знакъ въ первый разъ въ $(n+1)$-омъ, второй разъ въ $(n+3)$-емъ. F_n мѣняетъ знакъ въ первый разъ въ $(n+2)$-омъ, второй разъ въ $(n+4)$-омъ. Обѣ функціи вплоть до перваго корня положительны. Но мы уже прежде доказали, что F_{n+1} въ первый разъ мѣняетъ знакъ между двумя первыми корнями уравненія: $F_n=o$. Слѣдовательно, F_{n+1} мѣняетъ знакъ или въ промежуткѣ отъ перваго корня уравн. $F_n=o$ находящагося гдѣ-то въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ до $(n+2)\frac{\pi}{2}$, или въ промежуткѣ отъ $(n+3)\frac{\pi}{2}$ до второго корня уравн. $F_n=o$ находящагося гдѣ-то въ $(n+4)$-омъ квадрантѣ или въ промежуткѣ отъ $(n+2)\frac{\pi}{2}$ до $(n+3)\frac{\pi}{2}$, т. е. въ $(n+3)$-емъ квадр.

Притомъ, какъ это было доказано [1]), между двумя корнями уравненія $F_n=o$ находится только одинъ корень уравненія $F_{n+1}+o$.

Согласно нашему предположенію во всемъ этомъ промежуткѣ полиномы: X_{n-1}, X'_{n+1}, X_n, X'_n, всѣ уже постоянно имѣютъ тотъ-же самый знакъ, ибо x^2 больше всѣхъ корней

---

[1]) См. прим. на концѣ.

этихъ полиномовъ. Изъ уравненій XII видно, что въ данномъ случаѣ, когда $n=2i$ (четно)

$$\left.\begin{aligned} X_{n-1}&=(-1)^{i-1}\,\xi_{n-1}, & X'_{n-1}&=(-1)^{i-1}\,\xi'_{n-1},\\ X_n&=(-1)^{i}\,\xi_n, & X'_n&=(-1)^{i-1}\,\xi'_n, \end{aligned}\right\}\ \text{XIII}$$

гдѣ ξ_n, ξ'_n, ξ_{n-1}, ξ'_{n-1} суть существенно положительныя, но впрочемъ измѣняющіяся вмѣстѣ съ перемѣнной: x величины.

Съ другой стороны, сравнивая формулу: III, въ которой вмѣсто F_n напишемъ: $x^{-1/2}\,J_{n+1/2}$, съ извѣстной формулой:

$$m\,J_m=\frac{x}{2}\left[\,J_{m-1}+J_{m+1}\,\right]$$

въ которой, вмѣсто m напишемъ $n+1/2$ [1]), сейчасъ найдемъ, что:

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1}&=(2n+1)\,X_n-x^2\,X_{n-1}\\ X'_{n+1}&=(2n+1)\,X'_n-x^2\,X'_{n-1} \end{aligned}\right\}\ \text{XIV}$$

Изъ формулъ: XIII и XIV находимъ, что:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}=\frac{x^2\,\xi_{n-1}+(2n+1)\,\xi_n}{x^2\,\xi'_{n-1}-(2n+1)\,\xi'_n}$$

Итакъ во всемъ интересующемъ насъ промежуткѣ и дальше его частное:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

можетъ измѣнить знакъ, только одинъ единственный разъ, притомъ проходя черезъ безконечность (когда n нечетно, то это частное въ послѣдній разъ мѣняетъ знакъ проходя черезъ значеніе 0).

---

[1]) *Примѣчаніе.* Это дозволительно, ибо только что приведенная формула справедлива для всякаго положительнаго m.

Посмотримъ, можетъ-ли корень уравненія: $F_{n+1}=o$, находиться въ промежуткѣ отъ: $F_n=o$, до $(n+2)\frac{\pi}{2}$.

Мы уже прежде доказали, что вблизи точки: $x=o$.

$$F_{n+1} > o.$$

Но по формулѣ III:

$$F_{n+1}=Cx^{-n-2}X'_{n+1}\,sinx\left\{\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}-cotgx\right\}$$

$$X'_{n+1}=x\left[1-A_3\frac{x^2}{3!}+A_5\frac{x^4}{5!}-\ldots\right]$$

слѣдовательно для $x=o$, полиномъ въ скобкахъ равенъ единицѣ, а вблизи этой точки онъ положительный. И такъ вблизи, $x=o$

$$X'_{n+1} > o$$

но и

$$sinx > o$$

слѣдовательно вблизи $x=o$ должно быть:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}-cotgx > o.$$

Это значитъ, что вблизи $x=o$, кривая: $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ идетъ выше кривой котангенсовъ. Но, чтобы не пересѣчься нигдѣ съ кривой котангенсовъ до самой точки $F_n=o$, кривая: $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ должна непремѣнно постоянно идти выше кривой контангесовъ. Она можетъ это сдѣлать переходя черезъ нуль при значеніяхъ

$$x=\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1,\ \frac{3\pi}{2}+\varepsilon_2,\ \frac{5\pi}{2}+\varepsilon_3-\ldots\ldots$$

а черезъ безконечность при значеніяхъ

$$x=\pi+\eta_1,\ 2\pi+\eta_2,\ldots\ldots$$

Она должна такимъ образомъ перейти черезъ безконечность ровно $(i-1)$ разъ, ни больше ни меньше [1]). Вмѣстѣ съ тѣмъ замѣчаемъ, что еслибы который нибудь изъ полиномовъ X_{n+1} и X'_{n+1} имѣлъ многократный корень, то кривая $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ непремѣнно пересѣклась-бы съ $cotgx$ раньше чѣмъ F_n дѣлается въ первый разъ равно нулю, а это невозможно. Въ тотъ моментъ когда $F_n=o$, кривая: $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ уже совершила всѣ перемѣны знаковъ кромѣ послѣдняго i-таго перехода сквозь безконечность изъ отрицательныхъ значеній въ положительныя. До сихъ поръ она шла постоянно выше котангенса, слѣдовательно и въ точкѣ, гдѣ $F_n=o$ она идетъ выше котангенса т. е. въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ она идетъ выше котангенса. На всемъ промежуткѣ отъ перваго корня уравненія: $F_n=o$ до второго корня этого уравненія она можетъ только разъ пересѣкаться съ котангенсомъ. Положимъ что въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ она пересѣкаетъ его разъ; но тогда она перейдетъ сквозь безконечность еще въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ. Если-бы не перешла въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ, то, такъ какъ $cotgx$ въ концѣ этого квадранта дѣлается безконечнымъ, она должна-бы съ нимъ пересѣчься второй разъ, что невозможно. Опять, переходя изъ $-\infty$ въ $+\infty$ еще въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ она въ $(n+3)$-емъ сразу будетъ имѣть конечныя значенія, а не имѣя возможности болѣе измѣнить знака, останется постоянно положительной.

---

[1]) Для уразумѣнія этого совѣтуемъ составить соотвѣтственную діаграмму. Особенно наглядно представляется видъ обѣихъ кривыхъ если вообразить себѣ что точки $+\infty$ и $-\infty$ соединены напр. на кругахъ безконечнаго радіуса.

Но въ $(n+3)$-емъ квадрантѣ $cotgx$ переходитъ отъ $+\infty$ до 0 слѣдовательно непремѣнно будетъ второе пересѣченіе обѣихъ кривыхъ, что невозможно.

И такъ въ промежуткѣ отъ точки $F_n=o$ до $(n+2)\frac{\pi}{2}$ не можетъ быть корня уравненія: $F_{n+1}=o$.

Разсмотримъ теперь промежутокъ отъ точки $(n+3)\frac{\pi}{2}$ до второго корня $F_n=o$. Возьмемъ формулу I т. е.

$$F_n=x^{-1/2}\,J_{n+1/2}$$

и сравнимъ ее съ извѣстной формулой:

$$J_{m+1}=\frac{2m}{x}J_m-J_{m-1}$$

для $m=n+\frac{1}{2}$. Тогда сейчасъ найдемъ:

$$F_{n+1}=\frac{2n+1}{x}F_n-F_{n-1} \qquad \text{XV}$$

Наше изслѣдованіе происходитъ въ области положительныхъ значеній перемѣнной x, но тогда, очевидно: F_{n+1} обращается въ нуль только тогда, когда: F_n и F_{n+1} одного знака. Но F_n въ этомъ промежуткѣ постоянно отрицательно. F_{n+1} напротивъ того положительно, ибо между вторымъ корнемъ въ $(n+3)$-емъ квадрантѣ и 3-имъ въ $(n+5)$-омъ оно положительно. *Слѣдовательно въ промежуткѣ отъ $(n+3)\frac{\pi}{2}$, до второго корня уравн. $F_n=o$ не можетъ быть корня уравненія*: $F_{n+1}=o$.

И такъ этотъ первый корень можетъ быть и непремѣнно будетъ между точками $(n+2)\frac{\pi}{2}$ и $(n+3)\frac{\pi}{2}$ т. е.

въ $(n+3)$*-емъ квадрантѣ нѣсколько раньше точки, гдѣ* F_{n-1} *дѣлается второй разъ равнымъ нулю.*

Въ завершеніе доказательства разсмотримъ функціи F_0, F_1 и F_2. «Habitus» функціи F_0 нѣсколько иной, какъ остальныхъ.

По формулѣ III.

$$F_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x^{-1}\sin x$$

слѣдовательно корни уравненія: $F_0=o$, будутъ:

$$\pi,\ 2\pi,\ 3\pi\ldots\ldots n\pi\ldots\ldots\ldots$$

т. е. въ четныхъ квадрантахъ на самой границѣ съ нечетными

$$F_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x^{-2}(\sin x-x\cos x).$$

Корни уравненія: $F_1=o$ будутъ тѣ-же самые, что уравненія:

$$\frac{1}{x}-\cot g x=o.$$

Они будутъ абсциссами тѣхъ точекъ, въ которыхъ равнобочная гипербола: $yx=1$ пересѣкается съ кривой котангенсовъ.

Но въ первомъ и второмъ квадрантахъ:

$$\cot g x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\ldots-\frac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}{}^{1)}-\ldots$$

Изъ этого слѣдуетъ что разность

$$\frac{1}{x}-\cot g x$$

---

¹) B_n есть n-гое число Бернуйли.

постоянно положительна отъ o до π. Частное: $\frac{X_1}{X_1'}=\frac{1}{x}$ въ первый и послѣдній разъ мѣняло знакъ въ точкѣ $x=o$. Первый корень уравненія $F_1(x)=o$ находится значительно дальше. Гипербола идетъ асимптотически къ оси x-овъ и выше ея. И такъ $ctgx$ пересѣчетъ ее въ 3-емъ, 5-омъ, вообще во всѣхъ нечетныхъ квадрантахъ, начиная съ 3-аго.

$$F_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{-3}\left[(3-x^2)\,sinx-3x.\,cosx\right].$$

Корни уравненія $F_2=o$ тѣ-же что уравне́нія:

$$\frac{3-x^2}{3x}-cotgx=o,$$

$$\frac{X_2}{X_2'}=\frac{3-x^2}{3x}.$$

Это частное мѣняетъ знакъ переходя черезъ безконечность при $x=o$, черезъ нуль при $x=\sqrt{3}$.

Слѣдовательно первый корень долженъ находиться дальше точки $x=\sqrt{3}$, притомъ долженъ находиться только въ 4-омъ квадрантѣ.

Въ первомъ и второмъ квадрантѣ имѣемъ:

$$\frac{3-x^2}{3x}-cotgx=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\left\{\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\ldots\frac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}-\ldots\right.$$

Эта разность положительна отъ o до π. Въ третьемъ квадрантѣ котангенсъ положительный, а кривая: $\frac{3-x^2}{3x}$ отрицательная. Начиная съ точки $x=\sqrt{3}$, она постоянно отрицательна. Ординаты ея пока x конечно имѣютъ конечныя зна-

ченія. Слѣдовательно котангенсъ будетъ пересѣкаться съ этой кривой въ 4-омъ, 6-омъ и прочихъ четныхъ квадрантахъ.

Кривая $y=\dfrac{3-x^2}{3x}$ есть неравнобочная гипербола, ея асимптоты, прямыя: $x=o$ и $y+3x=o$.

На основаніи сказаннаго можно доказать, что F_3 имѣетъ первый корень въ 5-омъ, а дальнѣйшіе въ 7, 9.... и т. д. квадрантахъ. Потомъ, что F_4 имѣетъ корни въ 6, 8 и т. д. квадрантахъ.

Резюмируя сказанное можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе.

Корни уравненія:

$$F_n(x)=o \quad \text{или} \quad J_{n+\frac{1}{2}}=o$$

гдѣ $n=1, 2, 3 \ldots.$

находятся по одному въ $(n+2)$-омъ, $(n+4)$-омъ, вообще въ $(n+2i)$-омъ квадрантѣ, гдѣ $i=1, 2, 3 \ldots\ldots$

Что и требуется доказать.

Надъ аналитическими слѣдствіями этой теоремы не будетъ здѣсь распространяться.

Примѣчаніе.

При переписываніи, доказательство, что корни уравненія:

$$\varphi_{m+1}=o$$

находятся между корнями уравненія:

$$\varphi_m=o$$

было случайно пропущено.

Это доказательство дѣлается помощью формулъ: VII и VIII. Дѣйствительно, изъ формулы: VIII видно, что функція: φ_{m+1} дѣлается равна нулю вмѣстѣ съ производной по 0 отъ функціи: φ_m. Слѣдовательно между двумя корнями уравненія:

$$\varphi_m = 0$$

находится по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія:

$$\varphi_{m+1} = 0.$$

Нетрудно доказать, что въ этомъ промежуткѣ находится только одинъ корень. Дѣйствительно, если въ этомъ промежуткѣ φ_{m+1} мѣняетъ знакъ k разъ, то φ_{m+2} т. е. φ''_m мѣняетъ его по крайней мѣрѣ $k-1$ разъ. Но изъ перваго изъ уравненій VII слѣдуетъ, что, когда φ_{m+1} равно нулю, то φ_m и φ_{m+2} имѣютъ противуположные знаки, слѣдовательно φ_m должно тоже мѣнять знакъ $k-1$ разъ, но φ_m во всемъ разсматриваемомъ промежуткѣ не мѣняетъ знака. Оно мѣняетъ знакъ только на концахъ промежутка, но корни обѣихъ функцій различны.

Слѣдовательно:

$$k = 1.$$

Что и требуется доказать.

Изъ области геометріи и механики.

Д. Н. Зейлигера.

Aus dem Gebiet der Geometrie und Mechanik.

von D. N. Seiliger.

ВВЕДЕНІЕ.

Статьи, помѣщенныя здѣсь, написаны втеченіи текущаго года. Только первыя двѣ написаны, одна въ 1887, другая въ 1888 г. Напечатаніе ихъ теперь вызвано тѣмъ соображеніемъ, что интереса новизны онѣ не потеряли, такъ какъ до сихъ поръ, насколько намъ извѣстно, въ литературѣ не появлялось статей по тѣмъ-же вопросамъ. Относительно всѣхъ статей можно сдѣлать общее замѣчаніе. Каждая изъ нихъ была въ свое время предметомъ отдѣльнаго доклада Новороссійскому Обществу Естествоиспытателей. Лишь извлеченія изъ этихъ рефератовъ вошли въ настоящій сборникъ. Это объясняется различіемъ въ требованіяхъ, предъявляемыхъ стному и письменному изложенію предмета, а также желаніемъ дать лишь тѣ результаты нашихъ изслѣдованій, которые мы сочли наиболѣе важными.



I. О кривизнѣ плоскихъ исогоналей.

На плоскости данъ рядъ кривыхъ α, $\alpha,'$..., непрерывно слѣдующихъ одна за другой по какому-нибудь опредѣленному закону. На одной изъ кривыхъ α. берется точка A, чрезъ которую проводятъ исогонали β ко всѣмъ кривымъ α. Такимъ образомъ точка A оказывается вершиной криволинейнаго пучка β. Является вопросъ, какъ распредѣлены центры кривизны въ точкѣ A отдѣльныхъ кривыхъ пучка β?

1. Пусть A'—точка, въ которой какая-нибудь исогональ β встрѣчаетъ смежную съ α кривую α', AB и $A'B'$—касательныя въ A и A' къ кривой β, AO и $A'O$—касательныя въ тѣхъ-же точкахъ къ кривымъ α и α', K—точка пересѣченія первыхъ двухъ прямыхъ. (Ч. I.).

По опредѣленію,

$$\angle OAB = \angle OA'B';$$

слѣдовательно, вокругъ четыреугольника $AKA'O$ можетъ быть описана окружность, откуда

$$\angle AOA' = \angle BKB',$$

т. е. *уголъ между касательными въ A и A' къ смежнымъ кривымъ α и α' равенъ углу смежности въ A исогонали β.*

2. Пусть теперь α и α'—двѣ смежныя кривыя ряда α, AA' и AA''—элементы исогонали и ортогонали ряда, $A'O'$ и $A''O''$—касательныя въ A' и A'' къ кривой α', встрѣчающія

касательную въ A къ кривой α въ точкахъ O' и O'' соотвѣтственно; к—точка встрѣчи прямыхъ $A'O'$ и $A''O''$. (Ч.2.). Положимъ для краткости:

$$\angle AO'A'=m,\ \angle AO''A''=n,\ \angle O'KO''=p,$$

Треугольникъ $O'KO''$ даетъ:

$$1)\ m=n+p.$$

Но углы m и n равны, по предыдущему, угламъ смежности въ A изогонали и ортогонали; слѣдовательно,

$$2)\ m=\frac{AA'}{R},\ n=\frac{AA''}{R_2},$$

гдѣ R и R_2—радіусы кривизны въ A этихъ кривыхъ. Кромѣ того, такъ какъ прямыя $A'O'$ и $A''O''$ суть смежныя касательныя къ кривой α', то

$$3)\ p=\frac{A'A''}{R_1'},$$

изъ R_1'—радіусъ кривизны въ A'' кривой α'. Но изъ треугольника $AA'A''$, уголъ котораго при A'' равенъ прямому, слѣдуетъ:

$$4)\ A'A''=AA'sn\mu,\ AA''=AA'cs\mu,$$

гдѣ μ—уголъ между элементами AA' и AA''. Замѣчая, что въ предѣлѣ кривая α' совпадаетъ съ α и, слѣдовательно, предѣломъ для R_1' служитъ радіусъ R_1 кривизны кривой α въ A, находимъ въ силу 1), 2), 3) и 4):

$$A)\ \frac{1}{R}=\frac{sn\mu}{R_1}+\frac{cs\mu}{R_2}$$

Полученная формула легко можетъ быть выражена словами. Ее не трудно также истолковать геометрически. Для этого построимъ центръ M кривизны въ A исогонали AA'. Замѣтимъ, что

$$\angle MAO' = \angle A'AA'' = \mu, \quad AM = R.$$

Если за оси координатъ примемъ касательную AO' и нормаль AP кривой α, то для координатъ x и y точки M найдемъ:

$$x = Rcs\mu, \quad y = Rsn\mu.$$

Слѣдовательно, формула $A)$ можетъ быть приведена къ виду:

$$1 = \frac{x}{R_2} + \frac{y}{R_1},$$

что даетъ намъ слѣдующую теорему:

Теорема I. Центры кривизны отдѣльныхъ кривыхъ пучка исогоналей β къ системѣ плоскихъ кривыхъ α, соотвѣтствующіе вершинѣ пучка, лежатъ на прямой. Эту прямую назовемъ *централой* точки A.

Теорема II. Централа точки A проходитъ чрезъ центры кривизны въ A кривой α и ортогонали къ системѣ α.

Доказанныя теоремы заключаютъ въ себѣ полный отвѣтъ на вопросъ, поставленный въ началѣ статьи. Мы видимъ, что достаточно знать двѣ точки централы для того, чтобы построить центръ кривизны любой кривой пучка исогоналей. Дадимъ одно приложеніе.

Приложеніе. Требуется построить центръ кривизны въ какой-нибудь точкѣ A логариѳмической спирали. Извѣстно, что логариѳмическая спираль встрѣчаетъ подъ однимъ и тѣмъ-же угломъ радіусы-векторы, выходящіе изъ полюса O спирали. Со-

вокупность этихъ радіусовъ мы можемъ считать системой кривыхъ α. Система ортогоналей къ послѣдней извѣстна: это—система окружностей, общимъ центромъ которыхъ служитъ точка O. Такъ какъ въ данномъ случаѣ кривой α служитъ прямая OA, то центръ ея кривизны въ A лежитъ въ безконечности на перпендикулярѣ въ A къ AO. Слѣдовательно, централой точки A будетъ перпендикуляръ OB, возставленный къ OA въ O. Центръ кривизны M спирали лежитъ, слѣдовательно, на пересѣченіи нормали въ A къ спирали съ прямой OB.

Мы пришли такимъ образомъ къ давно извѣстному построенію.

Сентябрь 1887 г.

II. О кривизнѣ поверхностей.

Въ настоящей статьѣ мы намѣрены изслѣдовать распредѣленіе въ пространствѣ центровъ кривизны сѣченій данной поверхности (S) различными плоскостями, проходящими чрезъ одну и ту же точку S поверхности. Этотъ вопросъ легко рѣшается на основаніи результатовъ Эйлера и Менье.

Пусть SN—нормаль къ поверхности, NSX и NSI—плоскости главныхъ сѣченій, пересѣкающія по прямымъ SX и SI касательную плоскость къ поверхности въ точкѣ S, OSC—произвольное сѣченіе поверхности, плоскость котораго пересѣкаетъ касательную плоскость по прямой SC,O — центръ кривизны въ S полученнаго сѣченія. (Ч. 3.).

По теоремѣ Менье точка O есть проекція на плоскость OSC центра кривизны N нормальнаго сѣченія NSC. Полагая:

$$SN=R,\ SO=\rho,\ \angle NSO=\delta,\ \angle CSX=\varphi.$$

найдемъ, слѣдовательно:

$$\rho=Rcs\delta.$$

Но по теоремѣ Эйлера

$$\frac{1}{R}=\frac{cs^2\varphi}{R_1}+\frac{sn^2\varphi}{R_2}$$

гдѣ R_1 и R_2—главные радіусы кривизны, откуда

$$a)\ \frac{cs\delta}{\rho}=\frac{cs^2\varphi}{R_1}+\frac{sn^2\varphi}{R_2}.$$

Если мы примемъ за оси координатъ прямыя SX, SI и SN, то для координатъ x, y и z точки O легко найдемъ:

$$x=\rho sn\delta sn\varphi,\ y=-\rho sn\delta cs\varphi,\ z=\rho cs\delta.$$

Эти формулы даютъ:

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2;\frac{x^2}{R_2}+\frac{y^2}{R_1}=\rho^2 sn^2\delta\left(\frac{cs^2\varphi}{R_1}+\frac{sn^2\varphi}{R_2}\right);\ x^2+y^2=\rho^2 sn^2\delta$$

Отсюда вытекаетъ:

$$\left(\frac{x^2}{R_2}+\frac{y^2}{R_1}\right)\ (x^2+y^2+z^2)=\rho^4 sn^2\delta\left(\frac{cs^2\varphi}{R_1}+\frac{sn^2\varphi}{R_2}\right)=\rho^3 sn^2\delta cs\delta,$$

въ силу a). Пользуясь формулами:

$$z=\rho cs\delta, x^2+y^2=\rho^2 sn^2\delta,$$

получимъ окончательно:

$$\left(\frac{x^2}{R_2}+\frac{y^2}{R_1}\right)\ (x^2+y^2+z^2)=z(x^2+y^2)$$

Это уравненіе даетъ намъ теорему:

Теорема. Центры кривизны плоскихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ одну и ту-же точку S поверхности (S), лежатъ на поверхности четвертаго порядка. Эта поверхность имѣетъ тройную точку въ S и двойную прямую, совпадающую съ нормалью въ S къ поверхности (S).

Сентябрь 1888 г.

III. Объ одной теоремѣ элементарной геометріи.

Пусть a и b — двѣ прямыхъ въ пространствѣ (ч. 4). Чрезъ произвольную точку B второй прямой проведемъ плоскость (a, B) и возставимъ къ послѣдней перпендикуляръ BB_1, равный разстоянію BA точки B отъ прямой a. Сдѣлаемъ тоже построеніе для всѣхъ точекъ прямой b, при чемъ перпендикуляры BB_1 будемъ проводить въ одну и ту-же сторону отъ соотвѣтствующихъ плоскостей (a, B). Если условимся отрѣзки BB_1 называть *моментами* точекъ B относительно прямой a, то теорема, которую мы намѣрены доказать, можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ:

Теорема I. Проекціи на прямую b моментовъ ея точекъ относительно другой прямой одинаковы.

Доказательство. Пусть $\alpha\beta = b$—прямая, по которой измѣряется кратчайшее разстояніе прямыхъ a и b. Проведемъ прямую βB_2 равную и параллельную αA и соединимъ B_2 съ B и A. Такъ какъ фигура $\alpha\beta AB_2$—параллелограммъ, то

$$AB_2 \mp \alpha\beta.$$

Но $\alpha\beta$ перпендикулярна къ $A\alpha$; слѣдовательно, къ той-же прямой перпендикулярна и AB_2. Отсюда мы заключаемъ, что прямая $A\alpha$ перпендикулярна къ плоскости ABB_2, такъ какъ она перпендикулярна къ двумъ прямымъ AB_2 и AB послѣдней. Отсюда-же вытекаетъ, что взаимно-перпендикулярны пло-

скости (a, B) и ABB_2, такъ какъ первая проходитъ чрезъ перпендикуляръ ко второй. Но отрѣзокъ BB_1 перпендикуляренъ къ плоскости (a, B); слѣдовательно, онъ лежитъ въ плоскости треугольника ABB_2. Замѣтимъ, кромѣ того, что прямая AB_2, параллельная $\alpha\beta$, перпендикулярна къ плоскости $\beta B_2 B$, откуда

$$\angle AB_2 B = 90^\circ.$$

Опустимъ изъ B_1 перпендикуляръ $B_1\beta_1$ на BB_2. По извѣстной теоремѣ, проекція BB_1 на прямую b равна суммѣ проекцій на ту-же прямую прямыхъ $B\beta_1$ и $\beta_1 B_1$. Но прямыя AB_2 и $\beta_1 B_1$, лежащія въ одной и той-же плоскости и перпендикулярныя къ прямой $B_2 B$, параллельны между собой.

Такъ какъ первая изъ этихъ прямыхъ AB_1, по предыдущему, перпендикулярна къ плоскости $\beta\ B_2 B$, то-же имѣетъ мѣсто и для второй $\beta_1 B_1$. Слѣдовательно, $\beta_1 B_1$ перпендикулярна къ прямой b, лежащей въ плоскости $\beta B_2 B$. Но въ такомъ случаѣ проекція прямой $\beta_1 B_1$ на b равна нулю, откуда

$$\text{пр. } BB_1 = \text{пр. } B\beta_1.$$

Прямоугольные треугольники ABB_2 и $\beta_1\ BB_1$ равны, такъ какъ равны ихъ гипотенузы AB и $B_1 B_1$, а уголъ $B_2 AB$ одного равенъ углу $\beta_1 BB_1$ другого, такъ какъ каждый изъ этихъ угловъ служитъ дополненіемъ до прямого угла ABB_2.

И такъ

$$B\beta_1 = AB_2 = \alpha\beta = d.$$

Обозначая, кромѣ того, уголъ между прямыми a и b чрезъ φ находимъ

$$\angle \beta_1 B\beta = 90 - \varphi.$$

слѣдовательно,

$$\text{пр. } BB_1 = dsn\varphi. \quad Q. \; E. \; D.$$

Мы нашли такимъ образомъ, что проекція на прямую b момента всякой точки послѣдней относительно прямой a измѣряется произведеніемъ изъ кратчайшаго разстоянія d обѣихъ прямыхъ на sn угла между ними. Это произведеніе давно уже называется относительнымъ моментомъ прямыхъ a и b. Слѣдовательно, доказанную теорему нужно дополнить слѣдующей:

Теорема II. Общая величина проекціи на прямую b моментовъ ея точекъ относительно прямой a равна относительному моменту прямыхъ a и b.

Примѣчаніе. Теоремы I и II въ томъ видѣ, какъ мы ихъ дали, входятъ въ область чистой геометріи. Онѣ имѣютъ огромное значеніе для теоретической механики. Такъ, мной было показано въ январьскомъ засѣданіи мѣстнаго Общества естествоиспытателей, что изъ этихъ теоремъ вытекаетъ вся кинематика твердаго тѣла, включая въ нее и теорію винтовъ Ball'я. (*).

Здѣсь я ограничусь замѣчаніемъ, что, на сколько мнѣ извѣстно, выдѣленіе изъ механики интересующихъ насъ теоремъ сдѣлано впервые здѣсь.

Январь 1891 г.

IV. О преобразованіи паръ вращенія.

Мы назвали парой вращенія совокупность двухъ векторовъ P_A и P_B, равныхъ, параллельныхъ и прямопротивоположныхъ, причемъ прямая AB перпендикулярна къ общему направ-

(*) Рефератъ «Геометрическая теорія винтовъ».

ленію векторовъ (*). AB—плечо пары, произведеніе $P. AB$—моментъ пары. Дадимъ здѣсь новое доказательство слѣдующей основной теоремы.

Теорема. Двѣ пары, лежащія въ одной и той-же плоскости и имѣющія одинаковые моменты, эквивалентны.

При доказательствѣ будемъ пользоваться всѣми обозначеніями указаннаго труда.

Пусть P_A, P_B—слагающіе векторы пары, LM и KN—двѣ параллели, пересѣкающія прямыя, на которыхъ лежатъ векторы пары въ точка K, L, M и N соотвѣтственно (ч. 5). Фигура $KLMN$ есть параллелограммъ. Продолжимъ діагональ KM послѣдняго до встрѣчи въ O съ продолженіемъ плеча AB пары и опустимъ перпендикуляръ OST на параллели LM и KN. Приложимъ вдоль послѣднихъ 4 равныхъ вектора Q'_S, Q''_S, Q'''_T и Q^{IV}_T, общая величина которыхъ Q опредѣляется изъ условія:

$$Q. ST = P. AB.$$

Откуда

$$\frac{P}{Q} = \frac{ST}{AB}.$$

Построенная фигура даетъ:

$$ST: SO: TO = AB: BO: AO;$$

слѣдовательно,

$$a) \quad \frac{P}{Q} = \frac{SO}{BO} = \frac{TO}{AO}.$$

(*) Механика подобно измѣняемой системы. Вып. I, Гл. VI.

Четыре точки M, B, O и S лежатъ на одной окружности. Отсюда въ силу α) заключаемъ, что совокупность векторовъ P_B и Q''_S эквивалентна одному вектору R_0, лежащему на линіи KMO и имѣющему начало въ O. R — геометрическая сумма векторовъ P_B и Q''_S (*).

Точно также мы убѣдимся, что совокупность векторовъ P_A и Q'''_T эквивалентна вектору R_0', начало котораго также совпадаетъ съ O, причемъ векторъ тоже лежитъ на прямой KMO. R'—геометрическая сумма векторовъ P_A и Q'''_T. Замѣчая, что слагающіе вектора R_0 равны и прямопротивоположны слагающимъ вектора R'_0, мы заключаемъ, что векторы R_0 и R'_0 отличаются другъ отъ друга только сторонами, откуда,

$$R_0 + R'_0 \equiv o.$$

Но

$$P_A + P_B \equiv P_A + P_B + Q'_S + Q''_S + Q'''_T + Q^{IV}_T,$$

и

слѣдовательно

$$P_A + P_B \equiv Q'_S + Q^{IV}_T.$$

Но векторъ Q'_S и Q^{IV}_T образуютъ, по опредѣленію, пару вращенія, моментъ которой $Q.\,ST$ равенъ, по предыдущему, моменту $P.\,AB$ пары $(P,\ AB)$. $Q.\ E.\ D.$

Февраль 1891 г.

V. Кинематика подобно-измѣняемой фигуры.

1. Подобно-измѣняемой называется такая система точекъ, послѣдовательныя положенія которой представляютъ рядъ подобныхъ фигуръ. Въ настоящей статьѣ мы познакомимъ съ ре-

(*) Вып. I, гл. V. теор. VII. l. c.

зультатами нашихъ изслѣдованій въ области кинематики такой системы.

Движенія всякой измѣняемой системы бываютъ двухъ родовъ. Къ первому относятся такія движенія, при которыхъ система не испытываетъ деформаціи. Система, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ движется, какъ твердое тѣло. Ко второму роду относятся движенія, при которыхъ система деформируется. Эти движенія различны для различныхъ системъ и могутъ служить кинематическимъ опредѣленіемъ послѣднихъ. Такимъ движеніемъ, характернымъ для подобно-измѣняемой системы, слѣдуетъ считать *лучистое растяженіе*. Этимъ именемъ мы предложили назвать (*) такое движеніе системы, при которомъ одна ея точка O — неподвижна, а остальныя точки α переходятъ по *лучамъ* $O\alpha = \rho_\alpha$ въ новыя положенія α'. O — центръ растяженія, отношеніе $\frac{\alpha\alpha'}{O\alpha} = p$ — постоянное для всѣхъ точекъ системы — растяженіемъ послѣдней. Растяженіе — положительно, если направленія $O\alpha$ и $\alpha\alpha'$ совпадаютъ; оно отрицательно въ противномъ случаѣ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ изучать лишь элементарныя растяженія. Полагая, слѣдовательно,

$$\alpha\alpha' = v_\alpha dt, \quad p = e dt,$$

найдемъ:

$$A) \quad v_\alpha = \rho_\alpha e;$$

здѣсь e — коэффиціентъ элементарнаго растяженія. На основаніи вышесказаннаго, если e — положительно, то скорость v_α имѣетъ направленіе $O\alpha$; въ противномъ случаѣ направленіе скорости v_α совпадаетъ съ αO.

(*) Мех. под. изм. системы В. Ш, стр. 86—87.

Полученная формула даетъ намъ слѣдующую теорему:

Теорема I. При элементарномъ лучистомъ растяженіи равна нулю лишь скорость центра растяженія; скорости остальныхъ точекъ пропорціональны разстояніямъ послѣднихъ отъ центра.

Пусть (ч. 6) O, α_1 α_2—центръ растяженія e и двѣ точки системы. Разложимъ v_{α_1}, по линіи $\alpha_1\alpha_2$ и параллельно $O\alpha_2$. Если v' и v''—эти слагающія, то очевидно,

$$\frac{v'}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{v''}{O\alpha_2}=\frac{v_{\alpha 1}}{\rho_2}=e,$$

въ силу формулы A). Слѣдовательно,

$$v'=\alpha_1\alpha_2.\ e,\ v''=O\alpha_2.\ e=v_{\alpha 2},$$

въ силу той же формулы A). Полученныя формулы показываютъ, что скорость $v_{\alpha 1}$ точки α_1 складывается изъ двухъ скоростей. Изъ нихъ первой точка α_1 обладала бы въ томъ случаѣ, если бы центромъ растяженія e служила точка α_2; вторая —одинакова для всѣхъ точекъ α_1 и равна скорости точки α_2

Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема II. Лучистое растяженіе e вокругъ центра O можетъ быть замѣнено лучистымъ растяженіемъ e вокругъ новаго центра α_2, если въ тоже время всѣмъ точкамъ системы придать скорость $v_{\alpha 2}$ новаго центра, которой онъ обладалъ въ силу растяженія вокругъ O.

Мы будемъ говорить, что растяженіе вокругъ O перенесено въ точку α_2. На основаніи предыдущаго можно сказать, что переносъ растяженія изъ одного центра въ другой вызываетъ поступательную скорость, равную скорости втораго центра при первомъ растяженіи.

Прежде, чѣмъ перейти къ дальнѣйшимъ изслѣдованіямъ, отмѣтимъ слѣдующія, очевидныя теоремы:

Теорема III. Совокупность двухъ растяженій, имѣющихъ общій центръ, эквивалентна нулю (покою), если коэффиціенты растяженій отличаются только знаками.

Теорема IV. Совокупность произвольнаго числа растяженій e_1, $e_2 \ldots$, имѣющихъ общій центръ, эквивалентна одному растяженію съ тѣмъ же центромъ. Коэффиціентъ результирующаго растяженія равенъ алгебрической суммѣ коэффиціентовъ слагающихъ растяженій.

Положимъ теперь, что система испытываетъ одновременно ва растяженія, e_1 и e_2 вокругъ центровъ A и B (ч. 7). Произвольная точка C прямой AB обладаетъ въ силу обоихъ движеній двумя скоростями v' и v'', опредѣляемыми формулами:

$$v'=AC.\ e_1,\ v''=BC.\ e_2.$$

Допустимъ, что величины e_1 и e_2 одинаковаго знака. Въ этомъ случаѣ скорости v' и v'' будутъ направлены въ противоположныя стороны лишь для точекъ C отрѣзка AB и на послѣднемъ всегда найдется такая точка C_1, для которой

$$v'=v'',$$

т. е. эта точка останется въ покоѣ. Послѣднему условію можно дать видъ:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{e_2}{e_1}.$$

Перенесемъ теперь растяженія въ A и B въ точку C_1. На основаніи предыдущаго получимъ въ точкѣ C_1 два растяженія e_1 и e^2 и поступательныя скорости v' и v''. Совокупности первыхъ двухъ движеній эквивалентна, по предыдущему. растяженію въ C_1, коэффиціентъ ε котораго равенъ:

$$\varepsilon=e_1+e_2.$$

Совокупность вторыхъ двухъ движеній эквивалентна нулю, такъ какъ скорости v' и v'' равны и прямопротивоположны.

Если бы знаки коэффиціентовъ e_1 и e_2 были различны, то это отразилось бы лишь на положеніи точки C_1. Легко видѣть, что, если только не имѣетъ мѣсто равенство:

$$e_1+e_2=o.$$

то точка C_1 лежитъ внѣ отрѣзка AB, ближе къ тому центру, которому соотвѣтствуетъ наибольшій по абсолютной величинѣ коэффиціентъ e_1 или e_2, при чемъ снова

$$\frac{e_2}{e_1}=\frac{AC}{BC}.$$

Если

$$e_1+e_2=o,$$

то точка C_1 удаляется въ безконечность.

Все вышесказанное даетъ намъ:

Теорема V. Совокупность двухъ растяженій e_1 и e_2 вокругъ центровъ A и B эквивалентна одному растяженію ε вокругъ третьяго центра C_1; коэффиціентъ ε результирующаго растяженія равенъ алгебрической суммѣ коэффиціентовъ слагающихъ движеній, а центръ C_1 лежитъ на прямой AB и дѣлитъ ее внутренне или внѣшне въ обратномъ отношеніи коэффиціентовъ e_1 и e_2 складываемыхъ движеній. Первое имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если величины e_1 и e_2 одинаковаго знака; второе—въ противномъ случаѣ. Если величины e_1 и e_2 отличаются только знаками, то совокупность соотвѣтствующихъ растяженій нельзя замѣнить однимъ растяженіемъ.

Назовемъ *парой* совокупность двухъ растяженій вокругъ не совпадающихъ центровъ A и B, когда коэффиціенты e_1 и e_2 отличаются только знаками; отрѣзокъ $AB=d$—плечо пары;

произведеніе $d.\ e$ плеча на общую величину коэффиціентовъ— моментъ пары.

Теорема VI. Пара эквивалентна поступательному движенію, скорость котораго равна моменту пары, параллельна плечу пары и направлена отъ центра положительнаго растяженія къ центру отрицательнаго.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть A и B—центры положительнаго и отрицательнаго растяженій соотвѣтственно, P—какая-нибудь точка системы (ч. 8). Эта точка обладаетъ въ силу обоихъ движеній скоростями Pa—Pb, изъ которыхъ первая направлена отъ A къ P, вторая—отъ P къ B, причемъ

$$Pa=AP.\ e,\ Pb=BP.\ e.$$

гдѣ e—абсолютная величина коэффиціентовъ обоихъ движеній.

Складывая эти скорости въ одну Pp, легко найдемъ, что треугольники APB и Pap подобны, откуда

$$Pp \parallel AB \text{ и } \frac{Pp}{AB}=\frac{Pa}{AP}=e,$$

слѣдовательно,

$$Pp=AB.\ e.\ Q.\ E.\ D$$

Слѣдствіе. Пару можно переносить параллельно самой себѣ, измѣняя длину плеча и общую величину коэффиціентовъ слагающихъ движеній пары, лишь бы при этомъ моментъ пары оставался безъ измѣненія.

Пару будемъ обозначать символомъ $(AB)_e$.

3. Займемся теперь сложеніемъ растяженія и поступательной скорости.

Пусть O—центръ растяженія e, v—поступательная скорость системы. Проведемъ чрезъ O прямую, параллельную v, и на

ней отложимъ отрѣзокъ OO' въ сторону, противоположную направленію v, такъ, чтобы

$$a)\ OO'.e=v.$$

Въ O' придадимъ системѣ два растяженія: одно положительное, другое отрицательное съ общимъ коэффиціентомъ e. Совокупность этихъ движеній эквивалентна нулю (Теор. III). Но теперь мы имѣемъ три движенія: 1. поступательную скорость v, 2. поступательную скорость v' пары $(OO')_e$ и скорость растяженія e вокругъ центра O'. Въ силу предидущей теоремы

$$v'=OO'.\ e=v,$$

въ силу a). Кромѣ того, направленія скоростей v и v' прямопротивоположны. Слѣдовательно, первыя два движенія взаимпоуничтожатся, и останется лишь растяженіе въ O'.

Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема VII. Совокупность поступательной скорости v и растяженія e въ центрѣ O, эквивалентна растяженію e въ O'. Прямая $O'O$ параллельна v и направлена въ туже сторону, причемъ

$$OO'.e=v.$$

Примѣчаніе. Эту теорему можно считать обратной относительно теоремы II.

Теперь мы въ состояніи сложить любое число растяженій.

Теорема VIII. Совокупность n растяженій $e_1, e_2, ..e_n$ въ n не совпадающихъ точкахъ $A_1, A_2, ..A_n$ эквивалентна одному растяженію e или поступательной скорости v. Первое имѣетъ мѣсто, если сумма $(e_1+e_2+.+e_n)$ не равна нулю. Въ этомъ случаѣ центръ результирующаго растяженія совпадаетъ съ

центромъ массъ e_1, e_2, . . e_n, помѣщенныхъ въ соотвѣтствующихъ центрахъ складываемыхъ движеній.

Кромѣ того,

$$e = e_1 + e_2 + \ldots + e_n.$$

Второе имѣетъ мѣсто, если

$$e_1 + e_2 + . + e_n = o.$$

Доказательство. Изъ теоремы V вытекаетъ, что при сложеніи двухъ растяженій e_1 и e_2 въ A_1 и A_2 центръ результирующаго растяженія e совпадаетъ съ центромъ массъ e_1 и e_2, помѣщенныхъ въ A_1 и A_2. Кромѣ того, $e = e_1 + e_2$. Отсюда легко заключить о справедливости теоремы въ общемъ случаѣ. Если сумма $(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$ равна нулю, то мы можемъ поступить слѣдующимъ образомъ. Сложимъ $n-_1$ растяженій e_1, e_2, . . e_{n-1}. Это даетъ намъ, по предыдущему, одно растяженіе $e = e_1 + e_2 + . + e_{n-1}$ вокругъ нѣкотораго центра Q. Растяженіе e въ Q съ растяженіемъ e_n въ A_n образуетъ, по предположенію, пару, которая, по теоремѣ VI, эквивалентна поступательной скорости.

Другое доказательство. Перенесемъ всѣ растяженія въ произвольную точку P. Это даетъ намъ двѣ системы скоростей: 1. Систему скоростей растяженій e_1, e_2, . . e_n въ P и систему поступательныхъ скоростей v_1, v_2, . . v_n, соотвѣтственно равныхъ скоростямъ точки P, которыми обладаетъ послѣдняя въ силу отдѣльныхъ движеній e. Первая система, по теоремѣ IV, эквивалентна одному растяженію $e = e_1 + e_2 + . + e_n$ въ P, . . вторая —одной поступательной скорости V— геометрической суммѣ скоростей v_1, v_2, . v_n. Совокупность растяженія и скорости V эквивалитентна, по теоремѣ VII, растяженію e въ точкѣ P', опредѣленіе которой дано выше. Легко видѣть, что P' есть центръ массъ e_1, e_2. . . e_n, помѣщенныхъ въ A_1, . . A_n. Въ са-

комъ дѣлѣ, скорость v_i можно разсматривать, какъ моментъ перваго порядка массы e_i въ A относительно точки P. Точно также V есть такой-же моментъ массы e въ P' относительно той-же точки P. Но, по построенію, V—геометрическая сумма величинъ v_i. Отсюда мы заключаемъ, что P' совпадаетъ съ центромъ массъ e_i, такъ какъ, по опредѣленію, послѣдній есть точка, обладающая тѣмъ свойствомъ, что, если въ ней сосредоточить всю массу $e=e_1+e_2+.+e_n$, то моментъ массы e есть геометрическая сумма моментовъ массъ e_i относительно всякой точки P.

Если сумма $(e_1+e_2+.+e_n)$ равна нулю, то переносъ всѣхъ растяженій въ P дастъ лишь поступательную скорость V. Q. E. D.

4. Займемся теперь сложеніемъ растяженія e вокругъ точки O и вращеніемъ ω вокругъ оси s, не проходящей чрезъ O.

Опредѣленіе. Назовемъ *коническимъ винтомъ* (*) совокупность вращенія ω вокругъ нѣкоторой оси s и растяженія $e=p\omega$ вокругъ точки O той-же прямой; O—центръ винта, s—ось, а p— параметръ послѣдняго. Легко найти скорость v какой-либо точки a системы, испытывающей конически-винтовое движеніе.

Скорость v есть равнодѣйствующая двухъ скоростей.

Изъ нихъ первая v' (ч. 9.) лежитъ на радіусѣ Oa и равна:

$$v'=Oa.\ e=Oa.\ \omega.\ p.$$

Этой скоростью обладаетъ точка a въ силу растяженія e въ O. Вторая скорость v'' равна:

$$v''=aa.\omega,$$

(*) См. Мех. под. изм. системы. Вып. III стр. 91. Тамъ мы назвали винтъ, о которомъ идетъ рѣчь въ текстѣ, центральнымъ. Названіе коническій кажется намъ болѣе выразительнымъ. Авторъ.

гдѣ a—проекція точки a на ось винта. Скорость v'' перпендикулярна къ плоскости (s, a) и вызвана вращеніемъ ω вокругъ s. Замѣчая, что скорость v' и v'' взаимно перпендикулярны, и полагая:

$$\angle aOa = \varphi, \quad Oa = \rho,$$

найдемъ:

$$v^2 = v'^2 + v''^2 = \rho^2\omega^2 (p^2 + sn^2\varphi); \quad tg(v,\rho) = \frac{sn\varphi}{p}$$

Эти формулы были найдены нами прежде инымъ путемъ. (*).

Мы видимъ, что скорость точки a лежитъ въ касательной плоскости къ прямому круглому конусу, центръ котораго въ центрѣ винта, а ось совпадаетъ съ осью послѣдняго. Этимъ объясняется названіе, данное винту.

Пусть теперь s—ось вращенія ω, O—центръ растяженія e, причемъ точка O не лежитъ на прямой s (ч. 10). Въ силу обоихъ движеній какая-нибудь точка a системы обладаетъ двумя скоростями. Первая изъ нихъ v' вызвана вращеніемъ ω и, слѣдовательно, перпендикулярна къ плоскости (s, a); вторая v'' вызвана растяженіемъ e и направлена по Oa. Такъ какъ Oa въ данномъ случаѣ не лежитъ въ плоскости (s, a), если только точка a лежитъ внѣ плоскости (s, O), то уголъ (v', v'') не равенъ прямому. Является вопросъ, нѣтъ-ли точекъ a, для которыхъ этотъ уголъ равенъ нулю или двумъ прямымъ. Очевидно, для этого необходимо, чтобы a была проекціей точки O на плоскость (s, a). Геометрическое мѣсто этихъ проекцій есть окружность круга, плоскость котораго перпендикулярна къ s, а діаметромъ служитъ разстояніе OO' точки O отъ

(*) См. l. cit. стр 92, формулы B) и C.

прямой s. Пусть $OPO'Q$—эта окружность. Діаметръ OO' дѣлитъ послѣднюю на двѣ части, Въ точкахъ первой OPO' скорости v' и v'' прямо-противоположны; въ точкахъ второй $O'QO$ эти скорости направлены въ одну и туже сторону. Опредѣлимъ на первой полуокружности точку P, для которой $v=v'$. Замѣчая, что

$$v'=O'P.\omega,\ v''=OP.e,$$

найдемъ для опредѣленія точки P: $O'P.\omega=OP.e$ или

$$1)\ \frac{O'P}{OP}=\frac{e}{\omega}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что точка P единственна. Мы нашли, слѣдовательно, точку P, которая остается неподвижной въ силу обоихъ движеній системы. Проведемъ чрезъ P прямую s' параллельную s, и перенесемъ вращеніе ω на ось s, а растяженіе e изъ O въ P. Первый переносъ даетъ намъ вращеніе ω вокругъ s' и поступательную скорость, равную скорости v' точки P; результатомъ втораго переноса будетъ скорость растяженія e въ P и поступательная скорость v'' точки P.

Замѣчая, что скорости v' и v'' взаимно уничтожаются, заключаемъ:

Теорема IX. Совокупность вращенія ω вокругъ оси s и растяженія e въ точкѣ O, не лежащей на оси, эквивалентна коническому винту. Центръ P послѣдняго лежитъ на окружности, діаметромъ которой служитъ разстояніе точки O отъ оси s, а плоскость перпендикулярна къ s. Ось s' результирующаго винта параллельна оси s.

Введя параметръ $p=\frac{e}{\omega}$ винта и замѣчая, что (ч. 9).

$$\frac{O'P}{OP}=tg\ O'OP=tg\varphi,$$

получимъ въ силу 1):

Теорема X. Плоскость (O,s') образуетъ съ плоскостью $(O.s)$ уголъ φ, tg котораго равенъ параметру результирующаго винта.

Наши изслѣдованія мы закончимъ слѣдующей теоремой:

Теорема XI. Совокупность произвольнаго числа растяженій, поступательныхъ и вращательныхъ скоростей вообще эквивалентна коническому винту.

Доказательство. Положимъ, что подобно-измѣняемая фигура обладаетъ 3 системами одновременныхъ скоростей: 1. системой скоростей e растяженій вокругъ отдѣльныхъ точекъ; 2. системой поступательныхъ скоростей v_i и 3. системой вращенія ω_i вокругъ ней S_i. Послѣднія двѣ системы, какъ извѣстно, эквивалентны винту Пуансо. Пусть V и Ω его—его поступательныя и вращательныя слагающія. Первая система эквивалентна одному растяженію e вокругъ центра, скажемъ, Q. Складывая e съ V, найдемъ скорость растяженія e вокругъ новаго центра Q'. Складывая въ заключеніе послѣднюю скорость съ Ω, мы придемъ, по только что доказанной теоремѣ, къ коническому винту *Q. E. D.*

Примѣчаніе I. Такъ какъ всякое движеніе подобно измѣняемой системы, какъ легко видѣть, можемъ состоять лишь изъ совокупности поступательныхъ скоростей, скоростей вращенія и растяженія, то изъ полученной теоремы вытекаетъ: всякое элементарное движеніе подобно-измѣняемой фигуры есть коническій винтъ. Только этотъ результатъ былъ извѣстенъ до сихъ поръ. Онъ принадлежитъ Шалю (*).

(*) Chasles. Bulletin des sciences Nov. 1830.

Въ 3-мъ вып. Мех. под. изм. сист. читатель найдетъ прямое доказательство теоремы Шаля. Авторъ.

Примѣчаніе II. Пользуюсь случаемъ отмѣтить неточность, допущенную въ 3-мъ выпускѣ «Механики подобно измѣняемой системы». Въ примѣчаніи къ стр. 91 я утверждаю безъ доказательства, что «свойства кинематическихъ и силовыхъ винтовъ подобно-измѣняемой системы тождественны». Это невѣрно.

Кинематическіе винты значительно отличаются по своимъ свойствамъ отъ силовыхъ, въ чемъ меня убѣдило болѣе глубокое изслѣдованіе вопроса. Я былъ введенъ въ заблужденіе внѣшней аналогіей между сложеніемъ силовыхъ паръ растяженія и кинематическихъ паръ.

Февраль 1891 г.

Кинематика линейчатой пары.

Въ настоящей статьѣ мы разсмотримъ движеніе одной линейчатой поверхности α по другой β. Напоминаемъ извѣстное предложеніе Рело, по которому неподвижная поверхность β есть обертывающая всѣхъ положеній подвижной α.

Отсюда прямо вытекаетъ, что мы должны сначала разсмотрѣть условія, при которыхъ линейчатая поверхность α имѣетъ своей обертывающей тоже линейчатую поверхность.

1. Пусть α, α'—два смежныхъ положенія движущейся поверхности, a'—общая производящая, a—гомологичная a' производящая поверхности α (ч. 11). Прямыя a и a' безконечно близки другъ къ другу. Кромѣ того, прямая a' принадлежитъ оберткѣ. Мы видимъ, что оберткой линейчатой поверхности α будетъ также линейчатая поверхность, если при элементарномъ движеніи α производящая послѣдней a переходитъ въ положеніе безконечно близкой a'. Но совпаденіе двухъ прямыхъ требуетъ выполненія трехъ условій, что даетъ намъ теорему:

Теорема I. **Каждой производящей a линейчатой поверхности α отвѣчаетъ движеніе послѣдней со свободой третьяго порядка, движеніе, при которомъ оберткой поверхности α служитъ также линейчатая поверхность.**

Слѣдствіе. Движеніе, при которомъ оберткой поверхности α служитъ также линейчатая поверхность, обладаетъ свободой четвертаго порядка.

Разсмотримъ группу винтовъ третьяго порядка. отвѣчающую какой-нибудь производящей a. Въ группѣ третьяго порядка, какъ извѣстно, винты одинаковаго параметра p суть производящія одного рода однополаго гиперболоида (p). Гиперболоиды (p) имѣютъ общій центръ и общее направленіе осей. Между гиперболоидами (p) есть одинъ—главный, обладающій тѣмъ свойствомъ, что его производящія одного рода суть винты нулеваго параметра, производящими другого рода служатъ общіе лучи комплексовъ всѣхъ винтовъ группы, т. е. прямыя, перпендикулярныя къ траекторіямъ всѣхъ своихъ точекъ. Замѣчая, что въ разсматриваемомъ нами случаѣ элементарныя троекторіи точекъ производящей a лежатъ на поверхности α и, слѣдовательно, перпендикулярны къ нормалямъ къ α вдоль a, заключаемъ:

Теорема II. Винты нулеваго параметра группы, соотвѣтствующей производящей a, суть производящія одного рода гиперболическаго параболоида, при чемъ производящія втораго рода суть нормали вдоль производящей a къ поверхности α.

Выведемъ уравненіе параболоида нормалей. Примемъ за начало прямоугольныхъ осей координатъ центральную точку O производящей a; осью z—пусть служитъ прямая a, осью x—нормаль въ O къ поверхности α, а ось y направимъ отъ O къ безконечно близкой производящей. (Ч. 12). Если b—точка производящей a, касательная плоскость въ b къ поверхности α образуетъ съ плоскостью yz уголъ φ, для котораго

$$tg\varphi=\frac{z}{k}$$

гдѣ k—параметръ производящей a, z—координата точки b. Уравненія нормали въ b къ a будутъ слѣдовательно:

$$Z=z, \; y=-x \cot\varphi.$$

Пользуясь предыдущимъ значеніемъ $tg\varphi$, получимъ окончательно:

$$yz+kx=o.$$

Это уравненіе даетъ намъ:

Теорема III. Винты нулеваго параметра группы, соотвѣтствующей производящей a, встрѣчаютъ подъ прямымъ угломъ перпендикулярную къ a касательную къ поверхности α.

2, Займемся теперь соотношеніями между линейчатой поверхностью α и ея обертывающей β. Пусть α, α' и α''—три смежныхъ положенія движущейся поверхности, a и b—двѣ производящія, причемъ a общая производящая поверхностей α и α', b—общая производящая поверхностей α' и α'' (ч. 13). По извѣстной теоремѣ, прямыя a и b принадлежатъ оберткѣ β движущейся поверхности, но эти прямыя въ то же время суть смежныя производящія поверхности α', слѣдовательно:

Теорема IV. Общей производящей линейчатой поверхности α и ея обертки β отвѣчаетъ одинъ и тотъ-же параметръ k распредѣленія касательныхъ плоскостей къ обѣимъ поверхностямъ и однѣ и тѣже центральная точка u плоскость.

Эта теорема указываетъ признакъ, по которому можно узнать напередъ, можетъ-ли данная линейчатая поверхность α двигаться по другой линейчатой поверхности β. Именно, нужно опредѣлить для обѣихъ поверхностей параметры k_1 и k_2 въ функціи какого-нибудь одного перемѣннаго λ. Если полученныя такимъ образомъ двѣ функціи $f_1(\lambda_1)$ и $f_2(\lambda_2)$ таковы, что при опредѣленномъ выборѣ начальныхъ значеній величинъ λ_1 и λ_2 $f(\lambda_1)$ и $f(\lambda_2)$ будутъ далѣе постоянно равны, то движеніе возможно; въ противномъ случаѣ оно невозможно.

Примѣчаніе. Здѣсь представляется любопытный вопросъ: какъ по данной линейчатой поверхности α найти другую β, тоже линейчатую, по которой могла-бы двигаться поверхность α? Кинематически этотъ вопросъ рѣшенъ теоремами I и II. Но рѣшеніе его въ области геометріи и анализа намъ кажется чрезвычайно труднымъ. Путь къ его рѣшенію указывается теоремой IV. Какъ бы то ни было, интересъ поставленнаго вопроса несомнѣненъ.

3. Пусть теперь α и β двѣ линейчатыя поверхности, для которыхъ движеніе возможно. Разсмотримъ это движеніе. Положимъ, что (a, b)—общая производящая поверхностей въ какой-нибудь моментъ, a' и b'—смежныя съ a производящія послѣднихъ, (α, β) центральная точка производящей (a, b), α', β'—центральныя точки производящихъ a' и b'. (Ч. 14). Въ слѣдующій моментъ должны придти къ совпаденію производящія a' и b', точки α' и β' и, кромѣ того, центральныя плоскости въ α' и β' къ поверхностямъ α и β. Всего 5 условій, откуда мы заключаемъ, что въ каждый моментъ движеніе α по β вполнѣ опредѣленное. Спроектируемъ на (a, b) точки α' и β' въ a и b. Такъ какъ производящая (a, b) смежна, какъ съ a', такъ и съ b', то мы вправѣ разсматривать $a\alpha'$ и $b\beta'$, какъ прямыя, по которымъ измѣряются кратчайшія разстоянія прямыхъ a и a', a и b' соотвѣтственно.

Принимая:

$$a\alpha' = b\beta',$$

что вполнѣ отъ насъ зависитъ, мы въ силу предположеннаго равенства параметровъ k и k', соотвѣтствующихъ производящимъ a' и b', заключаемъ, что равны и безконечно-малые углы, образуемые съ (a, b) прямыми a' и b'. Элементарное движеніе α по β въ разсматриваемый моментъ заключается, слѣдовательно, въ томъ, что α испытываетъ элементарное поступательное движеніе $a\,b$ и вращается вокругъ (a, b) на

уголъ ψ, равный углу между касательными плоскостями въ a и въ b. И такъ α движется винтовымъ движеніемъ, осью котораго служитъ прямая (a, b), а параметръ r дается формулой:

$$r = \text{предѣлу} \frac{ab}{\psi}$$

Но если φ и φ'—углы съ центральной плоскостью въ (α, β), образуемые касательными плоскостями въ a и b, то

$$\psi = \varphi' - \varphi.$$

Съ другой стороны, такъ какъ точки a, b безконечно-близки къ (α, β), то

$$\varphi' = \frac{ab}{k}, \quad \varphi = \frac{aa}{k}.$$

Слѣдовательно,

$$\psi = \varphi' - \varphi = \frac{ab - aa}{k} = \frac{ab}{k},$$

откуда

$$\frac{ab}{\psi} = k = r.$$

Все предыдущее даетъ намъ теорему:

Теорема V. Движеніе линейчатой поверхности α по линейчатой же поверхности β въ томъ случаѣ, если оно возможно, есть вполнѣ опредѣленное движеніе. Поверхность α въ каждый моментъ движется элементарно-винтовымъ движеніемъ, осью котораго служитъ общая производящая поверхностей α и β, а параметръ равенъ параметру этой производящей.

Примѣчаніе. Доказанную теорему можно формулировать слѣдующимъ образомъ: если возможно движеніе линейчатой по-

верхности α по линейчатой же поверхности β, то α служитъ подвижнымъ, β—неподвижнымъ центроидомъ движенія.

4. Разсмотримъ частный случай развертывающихся поверхностей. Это —также линейчатыя поверхности съ той лишь особенностью, что смежныя производящія пересѣкаются. Эти поверхности бываютъ двухъ родовъ: къ первому относятся тѣ, въ которыхъ смежныя производящія пересѣкаются на конечномъ разстоянію; въ поверхностяхъ втораго рода производящія пересѣкаются въ безконечно-удаленныхъ точкахъ. Примѣромъ поверхностей перваго рода могутъ служить коническія поверхности, втораго—цилиндрическія.

Разсуждая, какъ при выводѣ теоремы IV, найдемъ:

Теорема VI. Для того, чтобы было возможно движеніе развертывающейся поверхности α по β, необходимо и достаточно, чтобы α и β были одного рода.

Теорема VII. Если поверхности α и β принадлежатъ къ первому роду, то въ каждый моментъ ихъ ребра возврата имѣютъ общую точку и въ ней общую касательную линію и плоскость.

Пусть at—общая касательная поверхностей A и B, a—общая точка реберъ возврата α и β послѣднихъ, a' и b'—смежныя съ a точки кривыхъ α и β (ч. 15). По предыдущему, at—общая касательная въ a этихъ кривыхъ. Слѣдовательно, углы $taa'=d\alpha$ и $tab'=d\alpha'$ суть углы смежности, а плоскости угловъ—плоскости кривизны кривыхъ α и β. Обозначая чрезъ $d\tau$ и $d\tau'$ элементарные углы второй кривизны послѣднихъ въ a, найдемъ для угла O между плоскостями taa' и tab' слѣдующее выраженіе:

$$1)\quad O=d\tau\pm d\tau'=\frac{ds}{T}\pm\frac{ds'}{T'},$$

гдѣ ds и T, ds' и T'—элементы дуги и радіусы второй кривизны кривыхъ α и β соотвѣтственно. Верхній знакъ относит-

ся къ тому случаю, когда поверхности A и B обращены другъ къ другу выпуклыми сторонами; нижній—, когда вдоль ab одна изъ поверхностей выпукла, другая вогнута.

Элементарное движеніе подвижной поверхности B по неподвижной A заключается въ томъ, что B вращается вокругъ at на уголъ O до совпаденія плоскостой tab' и taa'; затѣмъ B вращается вокругъ оси m, перпендикулярной въ a къ плоскости taa' на уголъ $(d\alpha - d\alpha')$ до совпаденія прямыхъ ab' и aa'. Наконецъ поверхность B движется поступательно вдоль aa' на величину $aa' - ab' = ds - ds'$ до совпаденія точекъ b' и a'. Сложимъ послѣднее движеніе съ вращеніемъ вокругъ оси m. Замѣчая, что ось m перпендикулярна къ направленію поступательнаго движенія, заключаемъ, что совокупность складываемыхъ движеній эквивалентна вращенію вокругъ оси n, параллельной m, при чемъ разстояніе p осей m и n опредѣляется по формулѣ:

$$2)\quad ds - ds' = p\,(d\alpha - d\alpha') = p\left(\frac{ds}{R} - \frac{ds'}{R'}\right)$$

гдѣ R и R'—радіусы кривизны въ a кривыхъ α и β. Плоскость (m, n), кромѣ того, перпендикулярна къ aa'. Такъ какъ прямая n, параллельная m, перпендикулярна къ плоскости taa', то она скрещивается подъ прямымъ угломъ съ at. Замѣчая, что въ предѣлѣ aa' совпадаетъ съ at, заключаемъ, что въ предѣлѣ ось n встрѣчаетъ подъ прямымъ угломъ общую главную нормаль въ a кривыхъ α и β.

Все выше сказанное даетъ намъ теорему:

Теорема VIII. Элементарное движеніе развертывающейся поверхности B перваго рода по такой-же поверхности A эквивалентно совокупности двухъ вращеній, оси которыхъ t и n скрещиваются подъ прямымъ угломъ, причемъ одна изъ нихъ t совпадаетъ съ общей касательной реберъ возврата поверхно-

стей A и B, а другая n встрѣчаетъ подъ прямымъ угломъ общую главную нормаль реберъ и возврата.

Обратимъ вниманіе на то, что въ формулы 1) и 2) входятъ элементы ds и ds' дугъ кривыхъ α и β. Такъ какъ между ds и ds' нѣтъ никакой зависимости, то мы заключаемъ:

Теорема IX. Движеніе поверхности B и A есть неопредѣленное движеніе съ первой степенью свободы.

Прежде, чѣмъ перейти къ изслѣдованію группы винтовъ, каждый членъ который можетъ служить осью элементарнаго движенія поверхности B, изслѣдуемъ нѣкоторые частные случаи.

Замѣчая, что $p=o$, если $ds=ds'$, а R не равно R', находимъ:

Теорема X. Если развертывающаяся поверхность B движется по такой-же поверхности A такъ, что ребро возврата первой поверхности катится безъ скольженія по ребру возврата второй, причемъ радіусы кривизны этихъ кривыхъ въ точкѣ ихъ соприкосновенія a не равны, то въ каждый моментъ поверхность вращается вокругъ оси e, проходящей чрезъ a. Ось e образуетъ съ общей касательной t въ a уголъ α, для котораго

$$tg\alpha=\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right):\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right).$$

Плоскость (e, t) перпендикулярна въ a къ общей главной нормали.

Полагая: $R=R'$ и $ds \gtrless ds'$, найдемъ изъ 2): $p=R$, что даетъ теорему:

Теорема XI. Если въ общей точкѣ реберъ возврата равны радіусы кривизны послѣдней, причемъ скольженіе имѣетъ мѣсто, то ось n совпадаетъ съ общей осью кривизны реберъ возврата.

Совокупность двухъ вращеній $(d\tau+d\tau')$ и $(d\alpha-d\alpha')$ вокругъ скрещивающихся осей t и n эквивалентна винту (p_λ).

Каждому значенію $\frac{ds}{ds'}$ отвѣчаетъ особое положеніе винта $(p_,)$. Эти винты $(p_,)$ образуютъ, слѣдовательно, группу винтовъ, характеризующую свободу подвижной поверхности B. Замѣчая, что кратчайшее разстояніе прямыхъ t и n измѣряется по общей главной нормали въ ребрамъ возврата α и β, заключаемъ:

Теорема XII. Винты $(p_,)$ группы, характеризующей свободу поверхности B въ какой-либо моментъ, встрѣчаютъ подъ прямымъ угломъ одну и ту же прямую. Эту прямую назовемъ *осью* группы.

Пусть at—общая касательная, $an=p$— общая главная нормаль реберъ возврата—(ч. 16), N—перпендикуляръ въ n къ плоскости nat. По предыдущему, элементарное движеніе поверхности B въ разсматриваемый моментъ складывается изъ двухъ элементарныхъ вращеній, изъ которыхъ одно $(d\tau+d\tau')$ имѣетъ осью прямую at, другое $(d\alpha-d\alpha')$—прямую N. Результирующій винтъ $(p_,)$ встрѣчаетъ подъ прямымъ угломъ прямую an въ точкѣ A такъ, что имѣетъ мѣсто слѣдующее уравненіе:

$$\frac{x}{(d\alpha-d\alpha')^2}=\frac{p-x}{(d\tau+d\tau')^2}=\frac{p}{(d\alpha-d\alpha')^2+(d\tau+d\tau')^2}$$

гдѣ чрезъ x обозначено разстояніе aA. Изъ этихъ формулъ, пользуясь предыдущимъ значеніемъ p, найдемъ:

$$1)\quad x=\frac{(ds-ds')\ (d\alpha-d\alpha_,)}{(d\alpha-d\alpha')^2+(d\tau+d\tau')^2}$$

$$p-x=\frac{(ds-ds')\ (d\tau+d\tau')^2}{(d\alpha-d\alpha')\ \{(d\alpha-d\alpha')^2+(d\tau+d\tau')\}},$$

откуда $2)\quad \sqrt{x\ (p-x)}=\lambda=\frac{(ds-ds')\ (d\tau+d\tau')}{(d\alpha-d\alpha')^2+(d\tau+d\tau')^2},$

гдѣ λ—параметръ винта (p_λ). Уголъ φ, образуемый осью l послѣдняго съ касательной at, опредѣляется по формулѣ:

$$3)\quad tg\varphi=\frac{d\alpha-d\alpha'}{d\tau+d\tau'}.$$

Формулами 1), 2) и 3) вполнѣ опредѣляется результирующій винтъ. Найдемъ геометрическое мѣсто этихъ винтовъ. Для этого достаточно исключить отношеніе $\frac{ds}{ds'}$ изъ 1) и 3), пользуясь формулами:

$$d\alpha=\frac{ds}{R},\ d\alpha'=\frac{ds'}{R'},\ d\tau=\frac{ds}{T},\ d\tau'=\frac{ds'}{T'}.$$

Изъ 1) и 3) легко получаемъ:

$$4)\quad x=\frac{ds-ds'}{d\tau+d\tau'}\ sn\varphi cs\varphi.$$

Отсюда и изъ 3), пользуясь только что написанными формулами, найдемъ:

$$A)\ x\left(\frac{1}{TR'}+\frac{1}{T'R}\right)=sn\varphi cs\varphi\ \left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)+sn^2\varphi\ \left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right).$$

Примемъ за оси координатъ касательную at, нормаль an и бинормаль av. Умножая полученное уравненіе на квадратъ разстоянія $\tau^2=y^2+z^2$ любой точки (x, y, z) оси винта $(p\lambda)$, найдемъ уравненіе поверхности, производящими которой служатъ различные винты (p).

$$A')\ x\ (y^2+z^2)\ \left(\frac{1}{TR'}+\frac{1}{T'R}\right)=yz\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)+y^2\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right),$$

Здѣсь осью x служитъ прямая an, осью z прямая at, а осью y—бинормаль av.

Разсмотримъ полученную поверхность.

Для удобства изслѣдованія введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\frac{1}{TR'}+\frac{1}{T'R}=A,\quad \frac{1}{R'}-\frac{1}{R}=2B,\quad \frac{1}{T}+\frac{1}{T'}=C.$$

Формулу *A)* **нетрудно представить въ слѣдующемъ видѣ:**

$$B)\quad tg^2\varphi\,(Ax-C)-2B\,tg\varphi+Ax=o.$$

Рѣшая это уравненіе относительно $tg\varphi$, **получаемъ:**

$$B')\quad tg\varphi_1=\frac{B+\sqrt{B^2-Ax\,(Ax-C)}}{2\,Ax-C},\quad tg\varphi_2=\frac{B-\sqrt{B^2-Ax\,(Ax-C)}}{2\,Ax-C}$$

откуда

$$C)\quad tg\,(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{2\sqrt{B^2-Ax\,(Ax-C)}}{2\,Ax-C}.$$

Формула *B)* **показываетъ, что чрезъ каждую точку** *A* **оси группы проходятъ два винта** (p_i). **Изъ формулы** *C)* **вытекаетъ, что уголъ между осями этихъ винтовъ равенъ прямому, если**

$$D)\quad x=\frac{C}{2A},$$

и равенъ нулю, если

$$E)\quad A^2x^2-ACx-B^2=o,$$

т. е. если

$$x=\frac{C\pm\sqrt{C^2+4B^2}}{2\,A}.$$

Пусть O—точка оси, чрезъ которую проходятъ взаимно-перпендикулярные винты. Перенесемъ начало поординатъ въ O, сохраняя прежнее направленіе осей. Уравненіе A' приметъ видъ:

$$A'')\quad Ax\ (y^2+z^2)=2Byz+\frac{C}{2}(y^2-z^2).$$

Повернемъ теперь новыя оси координатъ вокругъ оси X на нѣкоторый уголъ φ. Пользуясь формулами:

$$y=y'cs\varphi+z'sn\varphi,\quad z=-y'sn\varphi+z'cs\varphi,$$

находимъ:

$$y^2+z^2=y'^2+z'^2;\ yz=y'z'\ (cs^2\varphi-sn^2\varphi)-(y'^2-z'^2)\ sn\varphi cs\varphi,$$

$$y^2-z^2=(y'^2-z'^2)\ (cs^2\varphi-sn^2\varphi)+4y'z'sn\varphi cs\varphi.$$

Слѣдовательно, уравненіе $A'')$ приметъ видъ:

$$A''')\quad x\ (y'^2+z')\ A=y'z'\ \{2B\ cs\ 2\varphi+C\ sn\ 2\varphi\}+$$
$$+(y'^2-z'^2)\ \left\{\frac{C}{2}cs\ 2\ \varphi-B\ sn\ 2\ \varphi\right\}.$$

Выберемъ теперь уголъ φ такъ, чтобы

$$\frac{C}{2}cs\ 2\ \varphi-B\ su\ 2\ \varphi=o.$$

Обозначая этотъ уголъ чрезъ ψ, получаемъ:

$$F)\quad tg\ 2\ \psi=\frac{C}{2\ B},$$

$$A^{IV})\quad x\ (y^2+z^2)\ A=yz\{2Bcs\ 2\psi+Csn\ 2\psi\},$$

причемъ значки при y и z опущены.

Вставляя въ первую изъ формулъ $B': x=\frac{C}{2A}$, найдемъ:

$$tg\varphi_1=-\frac{2B+\sqrt{C^2+4B^2}}{C}$$

откуда

$$tg\,2\varphi_1=\frac{C}{2B}$$

Сравненіе этого выраженія съ $F)$ дастъ: $\varphi_1=\psi$, откуда слѣдуетъ, что новыя оси y и z совпадаютъ съ взаимно-перпендикулярными осями винтовъ (p_λ), проходящихъ чрезъ новое начало координатъ. Формулой $A^{IV})$ доказывается слѣдующая теорема:

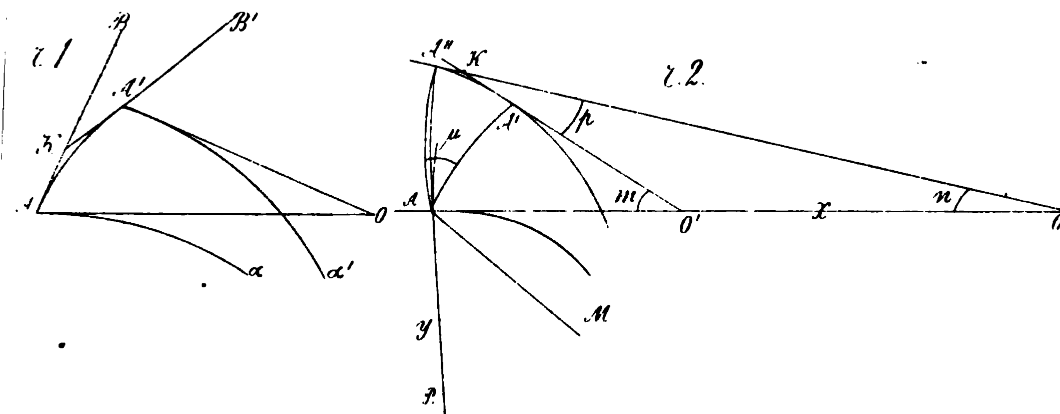
Теорема XIII. Оси винтовъ группы, характеризующей элементарную свободу развертывающейся поверхности, суть производящія цилиндроида. Директрисой цилиндроида служитъ главная нормаль an, центръ цилиндроида опредѣляется формулой D. Длина δ директрисы цилиндроида въ силу уравненія $E)$ дается формулой:

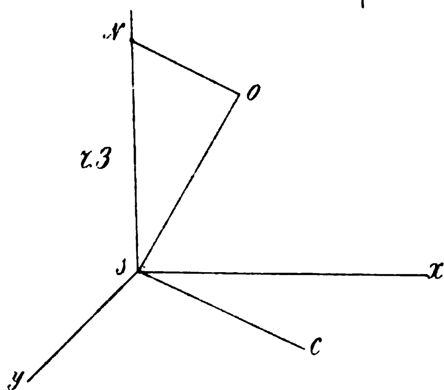
$$\delta=\frac{\sqrt{C^2+4B^2}}{A}.$$

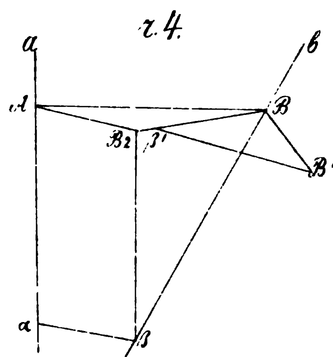
Этой теоремой мы закончимъ настоящія изслѣдованія.

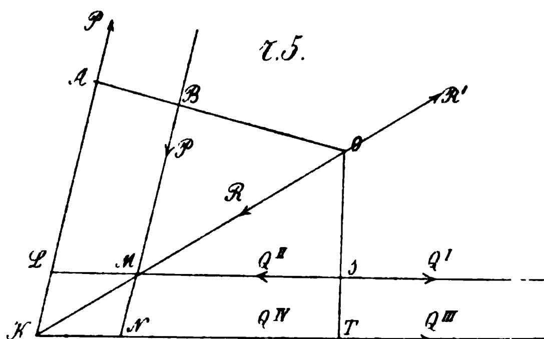
Мартъ 1891 г.

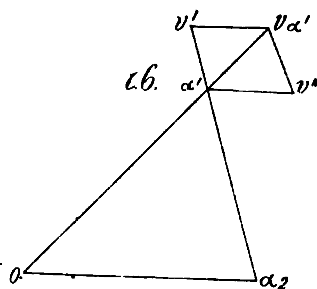


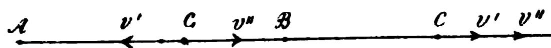

τ.1
B
B'
A'
A
O
α
α'
A''
K
τ.2
p
μ
m
n
O'
x
M
y
P

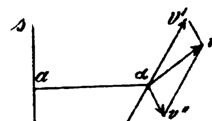

N
O
τ.3
x
C
y

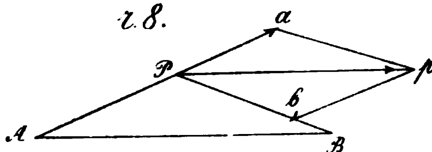

τ.4
a
b
A
B
B₂
B'
α
β

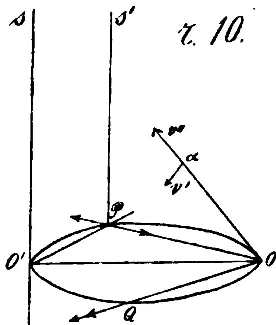

P
A
B
τ.5.
R'
O
P
R
L
M
Q^II
Q^I
K
N
Q^IV
T
Q^III

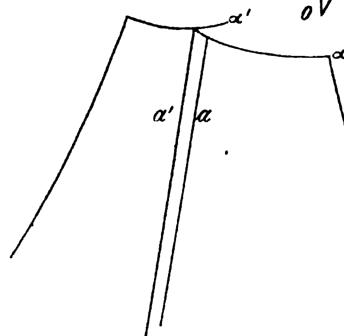

v'
vα'
τ.6.
α'
v''
O
α₂

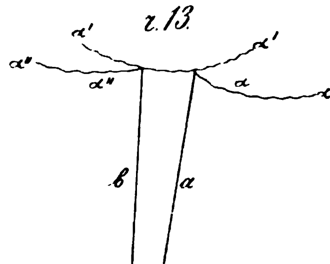

r. 7.
A v' c v'' B c v' v''

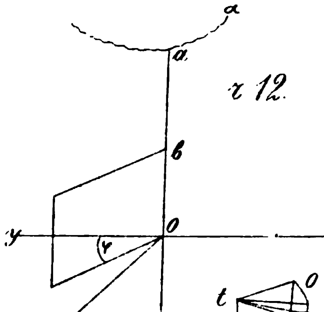

r. 9.
s a α v' v v'' o

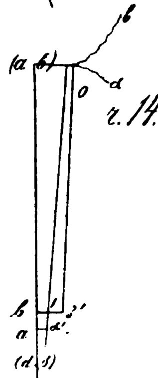

r. 8.
a P p b A B

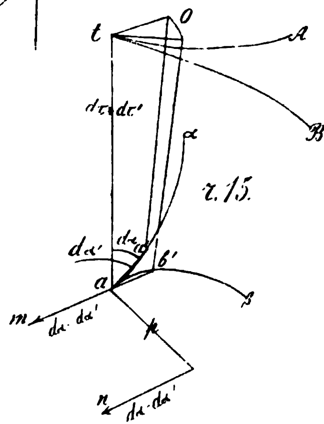

r. 10.
s s' v'' α v' P O' O Q

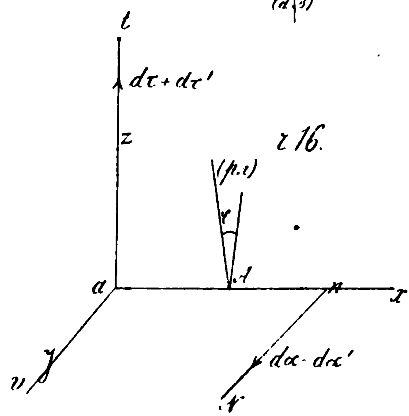

r. 11.
α' α a' a


r. 13.
α' α' α'' α'' α α b a


r. 12.
α a b O y φ x


r. 14.
b (a b) d o b a (d s)


r. 15.
t O A B α a b' m n


r. 16.
t dτ + dτ' z (p.t) φ a x y v dα - dα'

Къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

А. Старкова.

Pour la théorie des équations linéoires

par A. Starkoff.

Въ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій основный вопросъ ихъ рѣшенія при существующихъ условіяхъ изслѣдуется въ двухъ главныхъ направленіяхъ. Съ одной стороны ученые стремятся указать тѣ особенности, которыми отличаются эти рѣшенія, какъ опрѣделенный классъ функцій, и раскрыть ихъ общія свойства; съ другой—имѣютъ цѣлію изобразить эти рѣшенія опредѣленными аналитическими формулами въ зависимости отъ коеффиціентовъ даннаго уравненія т. е. написать ихъ математическимъ языкомъ. Послѣдующее изложеніе относится къ этому второму направленію изслѣдованій, такъ какъ оно имѣетъ въ виду дать форму выраженія частныхъ интеграловъ даннаго уравненія посредствомъ интеграловъ уравненія на единицу нисшаго порядка съ тѣми-же коеффиціентами.

Данное линейное дифференціальное уравненіе n-го порядка

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0 \qquad (1)$$

представимъ въ видѣ

$$\sum_{p=n}^{p=0}P_{n-p}y^p=0 \qquad (2)$$

гдѣ p при y означаетъ символически порядокъ производной по x. Если въ выраженіе (2) мы внесемъ вмѣсто y подстановку вида

$$y=\int Q_1 z dx \qquad (3)$$

то, пользуясь формулой многократныхъ дифференцированій произведенія и считая при этихъ дифференцированіяхъ указателей за показателей, получимъ

$$P_n\int Q_1zdx+z\sum_{p=n-1}^{p=0}P_{n-p-1}Q_1^p+\sum_{r=n-2}^{r=1}\frac{z^r}{1.2\ldots r}\frac{d^r}{dQ_1^r}\sum_{p=n-1}^{p=0}P_{n-p-1}Q_1^p=0 \qquad (4)$$

Такъ какъ одна изъ величинъ, Q_1 или z, въ подстановкѣ (3) можетъ быть взята произвольно, то выберемъ Q_1 такимъ образомъ, что-бы коеффиціентъ при z обращался въ нуль

$$\sum_{p=n-1}^{p=0}P_{n-p-1}Q_1^p=0 \qquad (5)$$

или

$$P_0\frac{d^{n-1}Q_1}{dx^{n-1}}+P_1\frac{d^{n-2}Q_1}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+P_{n-2}\frac{dQ_1}{dx}+P_{n-1}Q_1=0 \qquad (6)$$

т. е, опредѣлимъ Q_1, какъ интегралъ линейнаго уравненія (6), вполнѣ подобнаго данному (1) съ тѣми-же и также расположенными коеффиціентами, но на единицу низшаго порядка и безъ послѣдняго коеффиціента P_n.

Внося затѣмъ въ оставшійся двучленъ (4) вмѣсто z подстановку вида

$$z=\int Q_2udx \qquad (7)$$

получимъ на основаніи той-же формулы многократнаго дифференцированія произведеній

$$\begin{gathered}P_n\int Q_1dx\int Q_2udx+u\sum_{r=n-2}^{r=1}\frac{Q_2^r}{1.2\ldots r}\frac{d^r}{dQ_1^r}\sum_{p=n-1}^{p=0}P_{n-p-1}Q_1^p+\\+\sum_{k=n-3}^{k=1}\frac{u^k}{1.2\ldots k}\frac{d^k}{dQ_2^k}\sum_{r=n-2}^{r=1}\frac{Q_2^r}{1.2\ldots r}\frac{d^r}{dQ_1^r}\sum_{p=n-1}^{p=0}P_{n-p-1}Q_1^p=0\end{gathered} \qquad (8)$$

Въ подстановкѣ (7) одна изъ величинъ, Q_2 или u, можетъ быть взята произвольно. Выберемъ её такимъ образомъ, чтобы средній членъ выраженія (8) обратился въ нуль, именно

$$\sum_{r=n-2}^{r=1} \frac{Q_2^r}{1.2\ldots r} \frac{d^r}{dQ_1^r} \sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1} Q_1^p = 0 \tag{9}$$

Выраженіе (9) есть линейное уравненіе $n-2$ порядка относительно Q_2 и представляетъ по своей формѣ пониженное на единицу отъ (6) въ томъ случаѣ, когда извѣстенъ одинъ его частный интегралъ [1]).

Внося далѣе въ оставшійся двучленъ (8) подстановку вида

$$u = \int Q_3 s dx$$

получимъ для опредѣленія Q_3 линейное уравненіе $n-3$ порядка, представляющее по своей формѣ пониженное на два отъ (6) въ томъ случаѣ, когда извѣстны два его интеграла.

Слѣдующая подстановка для s

$$s = \int Q_4 t dx$$

дастъ для опредѣленія Q_4 линейное уравненіе $n-4$ порядка, пониженное на три отъ (6) и т. д.

Зависимость между интегралами основнаго уравненія (6) и интегралами пониженныхъ указана мною въ цитированной выше статьѣ; она выражается въ слѣдующей простой формѣ.

Если мы обозначимъ $n-1$ интегралъ уравненія (6) чрезъ

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1} \tag{10}$$

---

[1]) См. мою статью: Къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Записки Казанской Математ. Секціи. Казань 1884, а также статью Théorie des équations générales, Odessa 1889 p. 12 etc.

и составимъ изъ нихъ и ихъ производныхъ опредѣлитель вида

$$\begin{vmatrix} q_1, & q_2, & \dots . q_{m-1}, & q_{m+k} \\ q'_1, & q'_2, & \dots . q'_{m-1}, & q'_{m+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(m-1)}, & q_2^{(m-1)}, & \dots . q_{m-1}^{(m-1)}, & q_{m+k}^{(m-1)} \end{vmatrix} = Д_{m+k}^{m-1} \qquad (11)$$

то получимъ для Q_1, Q_2, $Q_3, \dots$ значенія

$$\begin{aligned} &Q_1 = q_1, \quad = q_2, \quad = q_3, \dots \quad = q_{n-1} \\ &Q_2 = Д_2^1 . q^{-2}, \quad = Д_3^1 . q_1^{-2}, \dots = Д_{n-1}^1 . q_1^{-2} \\ &Q_3 = q_1 . Д_3^2 . (Д_2^1)^{-2}, \quad = q_1 . Д_4^2 . (Д_2^1)^{-2}, \dots = q_1 . Д_{n-1}^2 . (Д_2^1)^{-2}, \\ &Q_4 = Д_2^1 . Д_4^3 . (Д_3^2)^{-2}, \quad = Д_2^1 . Д_5^3 . (Д_3^2)^{-2} \dots = Д_2^1 . Д_{n-1}^3 . (Д_3^2)^{-2} \qquad (12) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Q_m = Д_{m-2}^{m-3} . Д_m^{m-1} . (Д_{m-1}^{m-2})^{-2}, \dots = Д_{m-2}^{m-3} . Д_{n-1}^{m-1} . (Д_{m-1}^{m-2})^{-2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Q_{n-1} = Д_{n-3}^{n-4} . Д_{n-1}^{n-2} . (Д_{n-2}^{n-3})^{-2} \end{aligned}$$

Но на основаніи указанныхъ мною свойствъ опредѣлителей[2]) имѣемъ

$$\begin{aligned} &Q_1 = q_1, \quad = q_2, \quad = q_3, \dots = q_{n-1} \\ &Q_2 = \frac{d}{dx} \frac{q_2}{q_1}, \quad = \frac{d}{dx} \frac{q_3}{q_1}, \quad = \frac{d}{dx} \frac{q_4}{q_1}, \dots = \frac{d}{dx} \frac{q_{n-1}}{q_1} \qquad (13) \\ &Q_3 = \frac{d}{dx} \frac{Д_3^1}{Д_2^1} = \frac{d}{dx} \frac{Q_2^1}{Q_2}, \quad = \frac{d}{dx} \frac{Д_4^1}{Д_2^1} = \frac{d}{dx} \frac{Q_2^2}{Q_2}, \dots = \frac{d}{dx} \frac{Д_{n-1}^1}{Д_2^1} = \frac{d}{dx} \frac{Q_2^{n-3}}{Q_2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Q_{n-1} = \frac{d}{dx} \frac{Д_{n-1}^{n-3}}{Д_{n-2}^{n-3}} = \frac{d}{dx} \frac{Q_{n-2}^1}{Q_{n-2}} \end{aligned}$$

---

[2]) См. мою статью: Двѣ формулы изъ теоріи опредѣлителей. Записки Казанской Математ. Секціи. Казань 1884.

гдѣ верхній указатель при различныхъ Q соотвѣтствуетъ указателю послѣдняго входящаго въ ихъ составъ частнаго интеграла q. Очевидно при такихъ условіяхъ мы получимъ

$$\int Q_1 dx = \int q_1 dx$$

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx = \int Q_1 dx \int \frac{d}{dx} \frac{q_2}{q_1} dx = \int q_2 dx \tag{14}$$

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx \int Q_3 dx = \int Q_1 dx \int Q_2 dx \int \frac{d}{dx} \frac{Q_2^1}{Q_2} dx = \int q_3 dx$$

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx \int Q_3 dx \int Q_4 dx = \int q_4 dx$$

. . . .

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx = \int q_{n-1} dx$$

Въ 1877 году мною былъ данъ способъ интегрированія линейныхъ уравненій [3]), причемъ интегралы, выражались рядами вида

$$y_1 = 1 + \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx \int Q_n dx +$$
$$+ \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx + \ldots$$

$$y_2 = \int Q_1 dx + \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx + \ldots \tag{15}$$

$$y_3 = \int Q_1 dx \int Q_2 dx + \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx \int Q_2 dx + \ldots$$

. . . .

$$y_n = \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx +$$
$$+ \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx + \ldots$$

Здѣсь всѣ Q_1, Q_2, ... Q_{n-1} имѣютъ выше изслѣдованныя значенія интеграловъ тожественнаго данному уравненія $n-1$

---

[3]) Общій способъ интегрированія, линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ перемѣнными коеффиціентами. Одесса 1887.

порядка (6) и его пониженныхъ. Что-же касается Q_n, то оно опредѣляется выраженіемъ[4])

$$Q_n = \frac{P_n . Д_{n-2}^{n-3}}{P_0 . Д_{n-1}^{n-2}} = Д_{n-2}^{n-3} . P_n . (Д_{n-1}^{n-2})^{-2} \qquad (16)$$

такъ какъ по самому составу уравненія видно, что $P_0 = Д_{n-1}^{n-2}$ Принявъ во вниманіе формулы (14) и положивъ для краткости

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots . \int Q_{n-1} dx \int Q_n . A . dx = \Phi(A)$$

ряды (15) можемъ написать такъ

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + \Phi(1) + \Phi\Phi(1) + \Phi\Phi\Phi(1) + \ldots . \\
y_2 &= \int q_1 dx + \Phi\left(\int q_1 dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_1 dx\right) + \ldots . \\
y_3 &= \int q_2 dx + \Phi\left(\int q_2 dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_2 dx\right) + \ldots . \\
y_4 &= \int q_3 dx + \Phi\left(\int q_3 dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_3 dx\right) + \ldots \qquad (17) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{m+1} &= \int q_m dx + \Phi\left(\int q_m dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_m dx\right) + \ldots . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= \int q_{n-1} dx + \Phi\left(\int q_{n-1} dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_{n-1} dx\right) + \ldots .
\end{aligned}$$

По формулѣ (16) мы имѣемъ для Q_n выраженіе

$$Q_n = Д_{n-2}^{n-3} . P_n . (Д_{n-1}^{n-2})^{-2} \qquad (16)$$

Положимъ здѣсь P_n равнымъ

$$P_n = \Delta_n^{n-1} \qquad (18)$$

---

[4]) См. мою статью: Theorie des équations générales. Odessa 1889, p. 21, 25 etc.

или

$$P_n=\begin{vmatrix} \theta_{0,1}, & q_1, & q_2, & \ldots . q_{n-1} \\ \theta'_{0,1}, & q'_1, & q'_2, & \ldots . q'_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{n-1}_{0,1}, & q^{n-1}_1, & q^{n-1}_2, & \ldots . q^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix}=\sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1}\theta^p_{0,1} \qquad (19)$$

гдѣ $\theta_{0,1}$ и есть та неизвѣстная величина, которую слѣдуетъ опредѣлить для выполненія равенства (18). Очевидно, выраженіе (19) есть линейное уравненіе $n-1$-го порядка по $\theta_{0,1}$ вида

$$P_0\frac{d^{n-1}\theta_{0,1}}{dx^{n-1}}+P_1\frac{d^{n-2}\theta_{0,1}}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-2}\frac{d\theta_{0,1}}{dx}+P_{n-1}\theta_{0,1}=P_n \qquad (20)$$

т. е. вполнѣ одинаковое съ опредѣляющимъ Q_1 уравненіемъ (6), но лишь со второй частію, равною послѣднему коеффиціенту P_n въ данномъ уравненіи (1).

Если мы внесемъ въ выраженіе (16) значеніе для P_n, опредѣляемое изъ уравненія (18) или (20), то получимъ

$$Q_n=Д^{n-3}_{n-2}.\Delta^{n-1}_{n-1}.(Д^{n-2}_{n-1})^{-2}=\frac{d}{dx}\frac{\Delta^{n-2}_{n-1}}{Д^{n-2}_{n-1}}=\frac{d}{dx}\frac{Q'_{n-1}}{Q_{n-1}} \qquad (21)$$

гдѣ Δ^{n-2}_{n-1} и Q'_{n-1} имѣютъ такія-же значенія, какъ $Д^{n-2}_{n-1}$ и Q_{n-1} съ той лишь разницею, что въ нихъ вмѣсто послѣдняго q_{n-1} внесено $\theta_{0,1}$. При такихъ условіяхъ очевидно мы имѣемъ.

$$\int Q_1dx\int Q_2dx..\int Q_{n-1}dx\int Q_ndx=\int Q_1dx\int Q_2dx..\int Q'_{n-1}dx=\int\theta_{0,1}dx \quad (22)$$

Съ другой стороны вообще въ выраженіи

$$Q_n\int\theta_{m-1,k}dx=Д^{n-2}_{n-3}.(P_n\int\theta_{m-1,k}dx).(Д^{n-2}_{n-1})^{-2} \qquad (23)$$

можемъ положить

$$P_n\int\theta_{m-1,k}dx=\Delta^{n-1}_{n,m}=\begin{vmatrix}\theta_{m,k}, & q_1, & q_2, & \dots q_{n-1}\\ \theta'_{m,k}, & q'_1, & q'_2, & \dots q'_{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \theta^{n-1}_{m,k}, & q^{n-1}_1, & q^{n-1}_2, & \dots q^{n-1}_{n-1}\end{vmatrix}=\sum_{p=n-1}^{p=0}P_{n-p-1}\theta^p_{m,k} \quad (24)$$

тогда будемъ имѣть для опредѣленія $\theta_{m,k}$ линейное уравненіе n—1 порядка со второю частію вида

$$P_0\frac{d^{n-1}\theta_{m,k}}{dx^{n-1}}+P_1\frac{d^{n-2}\theta_{m,k}}{dx^{n-2}}+\dots+P_{n-2}\frac{d\theta_{m,k}}{dx}+P_{n-1}\theta_{m,k}=P_n\int\theta_{m-1,k}dx \quad (25)$$

т. е. уравненіе тоже одинаковое съ (6), но лишь со второю частію. Помощію значенія $\theta_{m,k}$, найденнаго изъ (24) или (25) мы преобразуемъ выраженіе (23) въ слѣдующіе

$$P_n\int\theta_{m-1,k}dx=Д^{n-2}_{n-2}.\Delta^{n-1}_{n,m}.(Д^{n-2}_{n-1})^{-2}=\frac{d}{dx}\frac{Q^m_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad (26)$$

гдѣ Q^m_{n-1} отличается отъ Q_{n-1} только тѣмъ, что въ немъ вмѣсто q_{n-1} внесено $\theta_{m,k}$. При такихъ условіяхъ мы имѣемъ

$$\Phi\left(\int q_1dx\right)=\int\theta_{1,1}dx$$

$$\Phi\Phi\left(\int q_1dx\right)=\Phi\left(\int\theta_{1,1}dx\right)=\int\theta_{2,1}dx$$

$$\Phi\Phi\Phi\left(\int q_1dx\right)=\Phi\Phi\left(\int\theta_{1,1}dx\right)=\Phi\left(\int\theta_{2,1}dx\right)=\int\theta_{3,1}dx$$

. . . .

и такъ далѣе и вообще

$$\Phi\left(\int q_mdx\right)=\int\theta_{m,1}dx$$

$$\Phi\Phi\Phi\dots\Phi\left(\int q_mdx\right)=\int\theta_{m,k}dx \quad (27)$$

На основаніи формулъ (27) ряды (17), представляющіе иноегралы линейнаго уравненія n-го порядка вида (1), обратятся въ выраженія

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,0}dx=\int\Big[0+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,0}\Big]dx\\
y_2 &= \int q_1dx+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,1}dx=\int\Big[q_1+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,1}\Big]dx\\
y_3 &= \int q_2dx+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,2}dx=\int\Big[q_2+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,2}\Big]dx\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{m+1} &= \int q_mdx+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,m}dx=\int\Big[q_m+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,m}\Big]dx\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= \int q_{n-1}dx+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,n-1}dx=\int\Big[q_{n-1}+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,n-1}\Big]dx
\end{aligned}
\tag{28}
$$

гдѣ

$$0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ldots .q_{n-1} \tag{29}$$

суть частные интегралы уравненія $n-1$ порядка вида (6), а

$$\theta_{1,0},\ \theta_{1,1},\ldots .\theta_{m,k},\ldots . \tag{30}$$

суть частные интегралы того-же самаго уравненія (6) лишь со второю частію, которая для каждаго изъ нихъ различна и измѣняется по простому закону.

Выраженіямъ (29) можно придать еще болѣе простую форму, соединяя интегралы (29) и (30) въ одну группу условіемъ, что указатель p принимаетъ всевозможныя значенія отъ 0 до ∞ и нулевое его значеніе опредѣляетъ интегралы уравненія (20) или (25) безъ второй части, т. е. уравненія (6), именно

$$\theta_{0,0}=0,\ \theta_{0,1}=q_1,\ \theta_{0,2}=q_2,\ldots .\theta_{0,n-1}=q_{n-1}$$

При такихъ условіяхъ интегралы (28) будутъ имѣть видъ

$$
\left.
\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{p=\infty}^{p=0} \int \theta_{0,p}\,dx = \int \Big(\sum_{p=\infty}^{p=0} \theta_{0,p} \Big) dx \\
y_2 &= \sum_{p=\infty}^{p=0} \int \theta_{1,p}\,dx = \int \Big(\sum_{p=\infty}^{p=0} \theta_{1,p} \Big) dx \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{m+1} &= \sum_{p=\infty}^{p=0} \int \theta_{m,p}\,dx = \int \Big(\sum_{p=\infty}^{p=0} \theta_{m,p} \Big) dx \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= \sum_{p=\infty}^{p=0} \int \theta_{n-1,p}\,dx = \int \Big(\sum_{p=\infty}^{p=0} \theta_{n-1,p} \Big) dx
\end{aligned}
\right\} \qquad (31)
$$

Формулы (28) и (31) представляютъ тѣ выраженія для интеграловъ линейнаго уравненія, выводъ которыхъ составляетъ предметъ настоящей статьи.



Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ.

И. В. Слешинскаго.

Zur Theorie der Methode der kleinsten Quadrate

Von J. Sleschinski.

Предисловіе.

Несмотря на большое число работъ, посвященныхъ исчисленію вѣроятностей [1]), въ новѣйшей литературѣ этого предмета встрѣчаемъ слѣдующее сужденіе [2]): «...darf es wol als allgemein anerkannt gelten, dass die umfangreichste Classe der die Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffenden Literatur in Bezug auf die principiellen Fragen nur sehr unzulängliches bietet: in den Schriften der Mathematiker nämlich findet man zwar den rechnenden Theil der Wahrscheinlichkeitstheorie in ausgezeichneter Weise entwickelt, daneben aber die Grundlagen der ganzen Lehre meist in einer Weise behandelt, welche an grossen Unklarheiten leidet und die mannigfaltigsten Zweifel bestehen lässt». Мы согласны съ авторомъ, что принципіальная сторона исчисленія вѣроятностей слабо обоснована. Но полагаемъ, что и аналитическая сторона также нуждается въ разработкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, сущность теоріи вѣроятностей заключается въ двухъ теоремахъ: законѣ большихъ чиселъ и теоремѣ, лежащей въ основаніи способа наименьшихъ квадратовъ. Какъ ни замѣчательны изслѣдованія Laplace'a [3]) и Poisson'a [4]) въ этой области,

[1]) См. Laurent. Traité du calcul des probabilités. Paris 1873. стр. 255–268.

[2]) Iohannes von Kries. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg. 1886. стр. 1.

[3]) Théorie analytique des probabilités. 3 edition Paris 1820. стр. 275—303, 304—348.

[4]) Recherches sur la probabilité des jugements. стр. 7—13, 137—145, 246—318.

Sur la probabilité des résultats moyens des observations. Connaissance des tems... pour l'an 1827. Paris 1824. стр. 273—302.—Suite de Mémoire sur la probabilité du résultat moyen des observations. Conn. des tems pour l'an 1832. Paris 1829. стр. 3—22.

тѣмъ не менѣе онѣ не удовлетворяютъ необходимому требованію точности. Вотъ что говоритъ Чебышевъ по поводу доказательства Poisson'а закона большихъ чиселъ [1]); «Toute ingénieuse que soit la méthode employée par le celèbre Géomètre, il reste à être impossible de montrer la limite de l'erreur que peut admettre son analyse approximative et par cette incertitude de la valeur de l'erreur, sa démonstration n'est pas rigoureuse» Чебышевъ далъ два точныхъ доказательства закона большихъ чиселъ. [2]) Первое изъ нихъ основано на употребленіи логариемической строки. Второе требуетъ лишь простыхъ алгебраическихъ преобразованій. По поводу этого доказательства авторъ говоритъ слѣдующее [3]):» «Dans un mémoire très intéressant, sous plus d'un rapport, que M. Bienaymé a lu à l'Academie des Sciences en 1853, et que l'on trouve imprimé dans les Comptes Rendus, et reproduit dans le journal des Mathématiques pures et appliquées de M. Liouville (2 série. T. XII. 1867) sous le titre: Considérations à l'appui de la decouverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés — l'illustre savant donne une méthode qui mérite une attention toute particulière. Cette méthode consiste dans la détermination de la valeur limite de l'intégrale $\int_0^a f(x)dx$, d'après les valeurs

[1]) Crelle 33. (1846) Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités. стр. 259—267.

[2]) Опытъ елементарнаго анализа теоріи вѣроятностей. Сочиненіе написанное для полученія степени магистра кандидатомъ Чебышевымъ. Москва. 1845. Въ этой книгѣ, представляющей библіографическую рѣдкость, доказана лишь теорема Bernoulli, частный случай теоремы Poisson'а. Теорема Poisson'а доказана впервые въ работѣ, помѣщенной въ 33 томѣ журнала Crelle, цитированной выше. Затѣмъ, она доказана въ мемуарѣ «О среднихъ величинахъ» Мат. Сборникъ. Т. 2. 1867 г. Переводъ этого мемуара: «Des valeurs moyennes». Journ. de Math. 2 Sér. T. XI. стр. 177—184.

[3]) Journ. de Liouv. 2 Sér. T. XIX. 1874 г. стр. 157—160. «Sur les valeurs limites der intégrales».

des intégrales $\int_0^A f(x)dx$, $\int_0^A xf(x)dx$, $\int_0^A x^2 f(x)dx$,......*ou* $A > a$ et $f(x)$ une fonction inconnue, assujetie seulement à la condition de garder le signe $+$ entre les limites d'intégration. La démonstration simple et rigoureuse de la loi de Bernoulli, que l'on trouve dans ma Note, sous le titre: Des valeurs moyennes, n'est, qu'un des résultats que l'on tire aisément de la méthode de M. Bienaymé et d'après laquelle il est parvenu lui même, à démontrer une proposition sur les probabilités, d'ou la loi de Bernoulli découle directement....». Хотя, такимъ образомъ, значительный пробѣлъ въ теоріи вѣроятностей былъ пополненъ Чебышевымъ [1]), но замѣчательныя изслѣдованія Laplace'а и Poisson'а остались однако неисправленными [2]) и въ такомъ видѣ продолжаютъ повторяться въ различныхъ книгахъ. Тоже самое можно сказать о способѣ наименьшихъ квадратовъ. Bienaymé характеризуетъ важность этого вопроса слѣдующими словами [3]) «La méthode des moindres carrés est si fréquemment employée aujourd'hui dans les sciences d'observation, que tout ce qui peut en rendre les applications plus sûres devient d'un grand interêt quelque simple que soit d'ailleurs.» Тѣмъ не менѣе Bienaymé продолжаетъ употреблять методъ Laplace'а, основанный на рядахъ, сходимость которыхъ остается недоказанной. Если

---

[1]) Болѣе чѣмъ странно въ новѣйшемъ курсѣ Bertrand'а (Calcul des probabilités. 1889), не только не встрѣтить имени Чебышева, но даже прочесть слѣдующія слова (стр. 94), «La généralisation proposée par Poisson sous le nom de loi des grands nombres manque non seulement de rigueur, mais de précision. Les conditions supposées dans l'énoncé échappent par le vague à toute appréciation mathématique». Это все, что говорится объ изслѣдованіи Poisson'а. Кстати замѣтить, что имя Bienaymé мы встрѣчаемъ въ этой книгѣ (стр. 295) безъ признанія заслугъ этого ученаго.

[2]) Доказательство Laurent'а l. c. содержитъ ошибку на стр. 103 въ строкѣ 13 сверху, которая существенно измѣняетъ заключенія.

[3]) Mémoire sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés. Mém. d. sav. etrang. XV. стр. 615—664. Также Journ. de Liouv. T. XVII. 1852.

принять въ соображеніе, что попытки доказательствъ Gauss'a[1]) содержатъ произвольныя допущенія, то должно признать, что Glaischer былъ правъ говоря[2]) «It is well known that all the proofs that have been given of the method of Least Squares contain, to say the least, some points of difficulty, and on this account any new investigation of the result is necessarily a matter of much interest». Лишь въ самое послѣднее время глубокія изслѣдованія въ области непрерывныхъ дробей привели Чебышева къ точному доказательству теоремы, лежащей въ основаніи способа наименьшихъ квадратовъ[3]). Въ основаніи доказательства лежитъ тотъ-же методъ, который привелъ къ доказательству закона большихъ чиселъ, но для приложенія его нужно было преодолѣть большія аналитическія трудности. При всей замѣчательности доказательства Чебышева, это доказательство нельзя назвать простымъ. Въ виду этого обстоятельства, а также въ виду важности вопроса, намъ казалось нелишеннымъ интереса напомнить объ изслѣдованіяхъ Cauchy, касающихся того же предмета. Способъ наименьшихъ квадратовъ былъ предметомъ спора, возникшаго въ 1853 году между Cauchy и Bienaymé. Этотъ-то интересный споръ былъ причиной появленія мемуара Bienaymé: «Sur l'appui...», о которомъ была рѣчь выше. Съ другой стороны тому-же спору наука обязана изслѣдованіями Cauchy, въ которыхъ содержится доказательство основной теоремы способа наименьшихъ квадратовъ при нѣкоторыхъ предположеніяхъ. Заслуги Cauchy, столь высоко цѣни

---

[1]) Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations. Par Ch Fr. Gauss. Trad. en franç. par Bertrand. Paris. 1855.

Bertrand. Calcul des Probabilités. Paris. 1889. стр. 247—258, 259—306.

См. также цитированную выше статью Bienaymé въ Mém. de Sav. etrang. стр. 619.

[2]) On the Law of Facility of Errors of observations und on the Method of Least Squares. Mem. of the r. astr. Soc. Part II. Vol XXXIX 1871—1872.

[3]) Записки Имп. акад. наукъ Т. 35. 1887 «О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей».

мыя въ другихъ отрасляхъ математики, остались, на сколько намъ извѣстно, почти незамѣченными въ области исчисленія вѣроятностей. Намъ казалось тѣмъ болѣе интереснымъ представить доказательство способа наименьшихъ квадратовъ по мемуарамъ Cauchy. Послѣдній изъ этихъ мемуаровъ, который содержалъ интересующее насъ доказательство, приведенъ въ Comptes Rendus въ краткомъ извлеченіи, передающемъ лишь одни результаты. Мы старались дать доказательство этихъ результатовъ, слѣдуя нѣкоторымъ указаніямъ, содержащимся въ предыдущихъ мемуарахъ Cauchy.

Прежде чѣмъ обратиться къ нашему предмету, мы позволимъ себѣ изложить вкратцѣ содержаніе спора о способѣ наименьшихъ квадратовъ. Поводомъ къ нему послужилъ написанный Cauchy во время пребыванія въ Прагѣ мемуаръ объ интерполяціи. Cauchy въ это время занимался теоріей свѣторазсѣянія [1]). Для этого изслѣдованія нужно было разлагать функціи въ ряды и Cauchy нашелъ способъ приближеннаго вычисленія коэффиціентовъ этихъ рядовъ по даннымъ значеніямъ функціи, разлагаемой въ рядъ; что приводилось къ рѣшенію линейныхъ уравненій. Мемуаръ, содержащій рѣшеніе этого вопроса, былъ литографированъ въ сентябрѣ 1835 года [2]). Затѣмъ онъ былъ напечатанъ въ журналѣ Liouville'а въ 1837 году [3]), впрочемъ съ пропускомъ приложеній къ свѣторазсѣянію [4]). Восемнадцать лѣтъ спустя Cauchy вернулся къ тому-же предмету и въ 36 томѣ Comptes Rendus напечаталъ помѣщенную въ отчетѣ о засѣданіи 27 Іюня статью: Mémoire sur l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations approximatives du premier degré. Этотъ мемуаръ начинается словами: «Comme l'a remarqué M. Faye, la nouvelle méthode d'interpola-

---

[1]) Valson. La vie et les travaux de Baron Cauchy T. 1. стр. 91.
[2]) Valson. l. c. стр. 31. Также Journ. de Liouv. T. 2. 1837. стр. 193.
[3]) Mémoire sur l'interpolation. Стр. 193—205.
[4]) Comptes Rendus. T. 37. стр. 108.

tion que j'ai donné dans un mémoire litographié en 1835, peut être utilement appliquée à l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations approximatives du premier degré». Дальше излагается тотъ-же способъ, что и въ предыдущемъ мемуарѣ, но въ другомъ видѣ, а именно — безъ связи съ разложеніемъ въ ряды. Способъ этотъ состоитъ въ послѣдовательномъ исключеніи неизвѣстныхъ изъ линейныхъ уравненій слѣдующимъ образомъ. Всякій разъ изъ оставшихся неизвѣстныхъ выбирается для исключенія то, для котораго сумма абсолютныхъ величинъ коэффиціентовъ въ различныхъ уравненіяхъ—наибольшая. Затѣмъ, измѣнивъ знаки въ уравненіяхъ, гдѣ коэффиціенты этого неизвѣстнаго отрицательны, складываемъ всѣ уравненія измѣненной такимъ образомъ системы. Рѣшивъ результатъ относительно исключаемаго неизвѣстнаго, подставляемъ выраженіе его въ каждое изъ уравненій. Такимъ образомъ получаемъ систему такого-же числа уравненій, содержащую одной неизвѣстной меньше и т. д. Уравненія, которыя служатъ для опредѣленія исключаемыхъ неизвѣстныхъ, образуютъ систему, въ которой каждое послѣдующее уравненіе содержитъ одной неизвѣстной меньше и служатъ для опредѣленія неизвѣстныхъ. Въ концѣ мемуара Cauchy показываетъ способъ перехода отъ полученныхъ такимъ образомъ значеній неизвѣстныхъ къ тѣмъ значеніямъ, которыя опредѣляются по способу наименьшихъ квадратовъ и высказываетъ убѣжденіе, что результаты двухъ методовъ вообще весьма близки между собою. Этотъ-то мемуаръ и былъ началомъ спора. Добавленіе, сдѣланное въ немъ и касающееся способа наименьшихъ квадратовъ, вызвано было возраженіемъ Bienaymé, статья котораго была напечатана нѣсколько позже, а именно въ отчетѣ о засѣданіи 4 Іюля (томъ 37). Статья Bienaymé носитъ заглавіе «Remarques sur les différences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy de la méthode des moindres carrés, et qui assurent la superiorité de cette méthode». Вотъ начало этого мемуара: «Depuis quelque temps, l'attention de plusieurs observa-

teurs s'est portée sur une méthode d'interpolation que M. Cauchy a publiée en 1835 et il semble qu'on ait regardé cette méthode comme ayant quelque chose d'analogue aux avantages de la célèbre méthode des moindres carrés. Il serait fâcheux, que les observateurs fussent trompés à cet égard par ce qui a pu être des deux méthodes, car elles diffèrent complétement, et si le procédé de M. Cauchy témoigne, comme tout ce qui sort de sa plume, de l'ingénieuse industrie, qu'il sait apporter jusque dans les questions pratiques, ce procédé n'en est pas moins tout à fait en contradiction avec les principes du calcul des probabilités». Далѣе авторъ, не оспаривая метода интерполяціи Cauchy, показываетъ, что множители, при помощи которыхъ Cauchy производитъ исключеніе неизвѣстныхъ, отличны отъ множителей способа наименьшихъ квадратовъ. Въ концѣ Bienaymé возражаетъ также противъ соединенія обоихъ методовъ, предлагаемаго Cauchy, находя, что это повело-бы къ удвоенію вычисленій. Въ отвѣтъ на это возраженіе Cauchy помѣстилъ въ отчетѣ о засѣданіи 18 Іюля статью подъ заглавіемъ: Mémoire sur l'interpolation ou Remarques sur les Remarques de M. Jules Bienaymé, въ которой приходитъ къ заключенію, что каждый изъ двухъ методовъ имѣетъ свои преимущества и что его методъ, главнымъ образомъ, предназначается для тѣхъ случаевъ, когда число неизвѣстныхъ напередъ не дано, какъ напримѣръ, число коэффиціентовъ безконечнаго ряда, которые должно удержать, ограничиваясь извѣстною степенью приближенія. Не удовлетворяясь однако этимъ, Cauchy переноситъ споръ отчасти на новый предметъ, а именно на состоятельность метода наименьшихъ квадратовъ независимо отъ сравненія его съ другими методами. Именно, въ отчетѣ о засѣданіи 25 Іюля помѣщенъ мемуаръ Cauchy подъ заглавіемъ «Sur la nouvelle méthode d'interpolation comparée à la méthode des moindres carrés. Этотъ мемуаръ заканчивается словами «Il est vrai que les calculs de Laplace assignent à la méthode des moindres

carrés une propriété importante, celle de fournir, comme le remarque M. Bienaymé, les résultats les plus probables. Mais cette propriété ne subsiste, comme je l'expliquerai dans un autre article, que sous certaines conditions; et alors même que ces conditions sont remplies, il peut se faire que, pour obtenir les résultats les plus probables, la voie la plus courte soit de joindre à la nouvelle méthode, la méthode de correction dont j'ai parlé». Для доказательства этихъ утвержденій Cauchy пришлось заняться критическимъ разборомъ доказательствъ способа наименьшихъ квадратовъ. Въ отчетѣ о засѣданіи 1 Августа Cauchy помѣщаетъ мемуаръ подъ заглавіемъ: «Mémoire sur les coefficients limitateurs ou restricteurs» въ которомъ изложено, въ иной формѣ, преобразованіе Dirichlet многократнаго интеграла къ постояннымъ предѣламъ. Именно, Cauchy пользуется для этой цѣли разрывнымъ множителемъ

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\int_{\omega'}^{\omega''}dt\; e^{\theta(\tau-\omega)i},$$

который равенъ *1* для значеній ω, заключающихся между ω' и ω'', и равенъ нулю для значеній, лежащихъ внѣ этого промежутка. Въ концѣ этого мемуара Cauchy прилагаетъ сказанное преобразованіе къ нахожденію вѣроятности, что ошибка средняго результата содержится внутри данныхъ предѣловъ. Затѣмъ онъ разсматриваетъ подробно частный случай, когда функція, выражающая вѣроятность ошибки, имѣетъ видъ, указанный Gauss'омъ

$$f(\varepsilon)=Ke^{-k\varepsilon}$$

и для этого частнаго случая приходитъ къ способу наименьшихъ квадратовъ. Вслѣдъ за тѣмъ, въ мемуарѣ, напечатанномъ въ отчетѣ о засѣданіи 8 Августа подъ заглавіемъ: «Sur les résultats moyens d'observations de même nature et sur les résultats les plus probables», Cauchy старается рѣшить общій

вопросъ, т. е. изслѣдовать, по скольку способъ наименьшихъ квадратовъ даетъ наиболѣе вѣроятные результаты при произвольной функціи $f(\varepsilon)$. Исходя при этомъ отъ требованія, чтобы значенія множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, обращающія въ maximum вѣроятность предположенія, что линейная функція

$$\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n$$

ошибокъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ заключается между предѣлами $\pm\upsilon$, не зависѣли отъ υ, онъ находитъ, что должно

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty e^{-c\theta^N} Cos\theta\varepsilon d\theta\,,$$

гдѣ c и N суть постоянныя. Случай $N=2$ приводитъ къ способу наименьшихъ квадратовъ. Въ случаѣ-же $N=1$, получается

$$f(\varepsilon)=\frac{k}{\pi}\cdot\frac{1}{1+k^2\varepsilon^2},\ \text{гдѣ}\ k=\frac{1}{c}\,.$$

Въ этомъ случаѣ наиболѣе вѣроятное значеніе не получается по способу наименьшихъ квадратовъ. — Въ то время, какъ Bienaymé обѣщаетъ привести въ защиту результатовъ Laplace'а вѣскія соображенія, Cauchy въ засѣданіи 16 Августа читаетъ мемуаръ «Sur la probabilité des erreurs qui affectent des résultats moyens d'observations de même nature», въ которомъ, продолжая изслѣдованія, изложенныя въ предыдущемъ мемуарѣ, приходитъ въ концѣ къ такому заключенію: «la valeur la plus probable **x** de l'inconnue x peut différer sensiblement de celle qui fournit la méthode des moindres carrés». Онъ задается однако вопросомъ, не имѣетъ-ли способъ наименьшихъ квадратовъ преимуществъ передъ другими способами при достаточно большомъ числѣ наблюденій и представляетъ въ томъ-же засѣданіи «Mémoire sur la probabilité des erreurs qui affectent les résultats moyens d'un grand nombre d'observations». Между тѣмъ, въ отвѣтъ на сомнѣнія, возбуждаемыя изслѣдованіями Cauchy, Bienaymé въ засѣданіи 29 августа сообщаетъ знаме-

нитый мемуаръ «Considérations á l'appui...», о которомъ мы говорили выше. Въ этомъ мемуарѣ Bienaymé выражаетъ между прочимъ убѣжденіе, что формулы, которыя Cauchy даетъ въ предыдущихъ мемуарахъ, могутъ, при надлежащемъ примѣненіи, привести къ доказательству способа наименьшихъ квадратовъ при произвольной функціи $f(\varepsilon)$. Въ отчетѣ о преніяхъ, которыя имѣли мѣсто по поводу этого сообщенія, сказано на основаніи возраженія Cauchy слѣдующее: «L'analyse à l'aide de laquelle on avait établi les propriétés de la méthode des moindres carrés s'appuyait sur des séries dont la convergence n'est pas démontrée. M. Cauchy a remplacé cette analyse par des formules exactes et rigoureuses». Хотя Cauchy въ своемъ возраженіи не отрицалъ возможности доказать методъ наименьшихъ квадратовъ при помощи выведенныхъ имъ формулъ, однако въ мемуарѣ: «Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le systeme de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimum», напечатаномъ въ отчетѣ о томъже засѣданіи, онъ пришелъ къ отрицательному рѣшенію вопроса, даетъ-ли способъ наименьшихъ квадратовъ наивѣроятнѣйшіе результаты даже при достаточно большомъ n. Это мнѣніе основано было однако на выводахъ, полученныхъ лишь вслѣдствіе несовершенства формулъ, состоящаго въ слишкомъ грубомъ приближеніи къ точной формулѣ. При дальнѣйшемъ изслѣдованіи Cauchy самъ устраняетъ эти несовершенства въ послѣднемъ мемуарѣ: «Mémoire sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations». Этотъ мемуаръ не былъ напечатанъ и въ отчетѣ о засѣданіи 5 Сентября мы находимъ лишь краткое извлеченіе изъ него. Этимъ мемуаромъ заканчивается споръ, который, какъ мы уже говорили, имѣлъ столь важное значеніе въ развитіи теоріи вѣроятностей. Въ результатѣ выяснилось, что истина была на сторонѣ Bienaymé, и Cauchy не замедлилъ въ концѣ концовъ прійти къ ней, подвергнувъ основательному сомнѣнію прежнія доказательства и проложивъ новый путь.

Введеніе.

Прежде чѣмъ перейти къ доказательству основной теоремы способа наименьшихъ квадратовъ, прослѣдимъ главные моменты въ ряду разсужденій, составляющихъ это доказательство.

Вообразимъ систему линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} a_{1,l}x_1+a_{2,l}x_2+\ldots+a_{m,l}x_m=u_l \\ l=1,2,\ldots n\ , \end{array}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ $a_{i,k}$—данныя числа, x_i—числа, выражающія значенія искомыхъ величинъ, u_i—числа, выражающія точно значенія наблюдаемыхъ величинъ. Если величины, выражающіяся числами x_i существуютъ, то система уравненій остается справедливой при всякомъ числѣ n. Для опредѣленія x_1 умножимъ эти уравненія соотвѣтственно на $\lambda_1, \lambda_2,\ldots\lambda_n$ и сложимъ полученные результаты. Затѣмъ выберемъ $\lambda_1, \lambda_2,\ldots\lambda_n$ такъ, чтобы удовлетворить уравненіямъ

$$\sum_{l=1}^{n} a_{1,l}\lambda_l=1,\ \sum_{l=1}^{n} a_{2,l}\lambda_l=0,\ldots \sum_{l=1}^{n} a_{m,l}\lambda_l=0\ . \qquad (2)$$

Тогда найденный отъ сложенія уравненій результатъ обратится въ

$$x_1=\sum_{l=1}^{n} u_l\lambda_l\ . \qquad (3)$$

Такимъ образомъ найдется значеніе x_1, если будутъ извѣстны значенія λ_l. Для опредѣленія значеній λ_l, имѣемъ уравненія (2), число которыхъ—m. Мы предполагаемъ что $n>m$ и, слѣдовательно, имѣемъ уравненій больше, чѣмъ неизвѣстныхъ. По-

этому вообще существуетъ безконечное множество системъ значеній λ_l, удовлетворяющихъ условіямъ (2) и опредѣляющихъ x_1. Если между n уравненіями есть покрайней мѣрѣ m независимыхъ, то каждая изъ системъ значеній λ_l даетъ одинъ и тотъ-же результатъ—искомое значеніе x_1. Но на самомъ дѣлѣ $u_l = k_l + \varepsilon_l$, гдѣ k_l получается изъ наблюденій, а ε_l представляетъ ошибку при наблюденіи. Вслѣдствіе этого

$$x_1 = \sum_{l=1}^{n} k_l \lambda_l + \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l \lambda_l = \sum_{l=1}^{n} k_l \lambda_l + \xi_1 ,$$

гдѣ $\sum_{l=1}^{n} k_1 \lambda_1$—значеніе x_1, получаемое по этому способу исключенія изъ системы уравненій, даваемой наблюденіями (уравненій, вообще несовмѣстныхъ), а ξ_1 ошибка въ этомъ значеніи. Ошибка

$$\xi_1 = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l \lambda_l$$

остается, конечно, неизвѣстной намъ, потому что неизвѣстны ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. Не существуетъ возможности путемъ анализа найти наиболѣе близкій къ истинѣ результатъ. Совершенно не зная величины ε, мы должны допустить, что она можетъ принимать всевозможныя значенія внутри извѣстныхъ предѣловъ. Если мы предположимъ дальше, что съ каждымъ значеніемъ ε связана опредѣленная вѣроятность его существованія, то окажется возможнымъ найти вѣроятность предположенія, что ошибка ξ заключается между предѣлами $-\upsilon$ и $+\upsilon$. При каждой величинѣ вѣроятности такого предположенія предѣлы $\pm\upsilon$ будутъ зависѣть отъ значеній λ_l. Изъ всѣхъ системъ значеній λ_l, удовлетворяющихъ уравненіямъ (2), можно искать той, для которой υ имѣетъ наименьшее значеніе, т. е. ошибка, отвѣчающая опредѣленной вѣроятности, становится возможно малою. Такой выборъ будетъ наиболѣе выгоднымъ. Однако сдѣлать его безъ

дальнѣйшихъ предположеній невозможно, ибо въ формулы входитъ совершенно неизвѣстная намъ функція, выражающая законъ вѣроятностей ошибокъ. Но оказывается, что съ увеличеніемъ n до ∞ вѣроятность предположенія, что ошибка ξ заключается между $\pm\upsilon$, приближается все больше и больше къ величинѣ, независящей отъ закона вѣроятностей ошибокъ:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\upsilon}{2\sqrt{c\Lambda}}} d\alpha\, e^{-\alpha^2},$$

гдѣ c нѣкоторое постоянное, а $\Lambda=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_i^2$. Если положимъ $\upsilon=2t\sqrt{c\Lambda}$, то выйдетъ, что, выбравъ n достаточно большимъ, можемъ съ вѣроятностью сколь угодно близкой къ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t} d\alpha\, e^{-\alpha^2}$$

утверждать, что ξ заключается между предѣлами $\pm 2t\sqrt{c\Lambda}$. Но эти предѣлы будутъ наиболѣе тѣсными если Λ т. е. $\sum_{l=1}^{n}\lambda_i^2$ будетъ minimum. Итакъ изъ безчисленнаго множества системъ значеній λ_i, удовлетворяющихъ уравненіямъ (2), лучше всего выбрать ту, которая доставляетъ функціи этихъ перемѣнныхъ Λ наименьшую величину. Опредѣленіе такой системы значеній представляетъ непосредственное приложеніе теоріи наибольшихъ и наименьшихъ функцій отъ многихъ перемѣнныхъ и легко показать, что значенія x, получаемыя при помощи такихъ множителей λ_i суть именно тѣ, которыя получаются по способу наименьшихъ квадратовъ.

Возвратимся теперь къ вѣроятности предположенія, что ошибка ξ заключается между предѣлами $\pm v$. Если представимъ вѣроятность предположенія, что ошибка наблюденія не превосходитъ величины ε, въ видѣ

$$F(\varepsilon)=\left|\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha)\right| ,$$

то легко доказать, что вѣроятность предположенія, что

$$\xi=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n$$

заключается между $\pm v$, выразится формулой

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha} ,$$

гдѣ

$$\Phi(\alpha)=\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha)$$

$$\varphi(\alpha)=\int_{-x}^{x} d\varepsilon f(\varepsilon)\, e^{\alpha\varepsilon i} ,$$

а x означаетъ величину, которой не можетъ превосходить никакая ошибка. Вся трудность заключается въ преобразованіи этого интеграла, дозволяющемъ прослѣдить переходъ къ предѣлу $n=\infty$. Если предположить, что $f(-\varepsilon)=f(\varepsilon)$, то

$$\varphi(\alpha)=2\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon) Cos\alpha\varepsilon .$$

Разложивъ $Cos\alpha\varepsilon$ въ рядъ и ограничиваясь двумя первыми членами разложенія, имѣемъ

$$\varphi(\alpha)=2\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)-\alpha^2\int_0^x d\varepsilon\,.\,\varepsilon^2 f(\varepsilon)$$

Но $$2\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)=\int_{-x}^x d\varepsilon f(\varepsilon)=1\,,$$

ибо представляетъ вѣроятность, что ошибка принимаетъ одно изъ всѣхъ тѣхъ значеній, какія вообще возможны для нея (со включеніемъ значенія o). Если обозначимъ $\int_0^x d\varepsilon\,.\,\varepsilon^2 f(\varepsilon)$ чрезъ c, то получимъ приближенно

$$\varphi(\alpha)=1-c\alpha^2$$

Но

$$e^{-c\alpha^2}=1-c\alpha^2+..$$

Поэтому приближенно

$$\varphi(\alpha)=e^{-c\alpha^2}\quad.$$

Вслѣдствіе этого

$$\Phi(\alpha)=e^{-c\alpha^2\Lambda}\quad.$$

Поэтому приближенно

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\, e^{-c\alpha^2\Lambda}\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha}\;,$$

что, при помощи извѣстной формулы преобразованія, переходитъ въ

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\upsilon}{2\sqrt{c\Lambda}}} d\alpha\, e^{-\alpha^2}$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ формулѣ, приведенной выше. Такой переходъ не позволяетъ дѣлать никакихъ точныхъ заключеній, ибо приближенное выраженіе для $\varphi(\alpha)$ будетъ

сколь угодно близко къ истинному лишь при достаточно маломъ α Между тѣмъ какъ въ выраженіи P, перемѣнное α возрастаетъ до ∞. Поэтому, для точнаго изслѣдованія P, приходится разбить это выраженіе на два слагаемыхъ:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha} \text{ и } \frac{2}{\pi}\int_\theta^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha} .$$

Теперь можно выбрать θ достаточно большимъ, чтобы сдѣлать второе слагаемое произвольно малымъ. Для доказательства этого утвержденія приходится пользоваться замѣчательнымъ свойствомъ функціи $\varphi(\alpha)$, по которому

$$\frac{1-\varphi^2(\alpha)}{\alpha^2\varphi^2(\alpha)}$$

при вещественныхъ значеніяхъ α остается больше нѣкоторой отличной отъ 0 величины. Послѣ этого остается заняться первой частью т. е.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha} .$$

Такъ какъ α въ интегралѣ принимаетъ значенія, непревышающія θ, то аргументы функцій φ, входящихъ въ Φ не превышаютъ значеній $\lambda_1\theta, \lambda_2\theta, \ldots \lambda_n\theta$ и, при сколь угодно большомъ θ, если λ достаточно малы, могутъ быть сдѣланы достаточно малыми для того, чтобы можно было замѣнить $\Phi(\alpha)$ чрезъ

$$e^{-c\Lambda\alpha^2} .$$

Вслѣдствіе чего получится выраженіе

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\, e^{-c\alpha^2\Lambda}\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha} ,$$

отъ котораго легко перейти къ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\, e^{-c\alpha^2\Lambda}\,\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha},$$

потому что функція $e^{-c\alpha^2\Lambda}$ чрезвычайно быстро убываетъ съ увеличеніемъ α и, вслѣдствіе этого, расширеніе предѣловъ до ∞ даетъ прибавку сколь угодно малую.

Итакъ видимъ, что переходъ отъ выраженія P къ окончательному простому результату раздѣляется на три перехода: 1) съуженіе предѣловъ интеграціи, 2) замѣна функціи подъ знакомъ интеграла, 3) расширеніе предѣловъ интеграціи. Для выполненія перваго изъ этихъ переходовъ необходимо знаніе вышеуказаннаго свойства функціи φ. Для втораго перехода необходимо преобразованіе

$$\int_0^{\infty} dt\, e^{-t^2}\frac{Sin 2at}{t} = \sqrt{\pi}\int_0^{a} dt\, e^{-t^2}$$

Это преобразованіе, равнымъ образомъ и преобразованіе Dirichlet многократнаго интеграла къ постояннымъ предѣламъ мы предполагаемъ въ настоящей статьѣ извѣстными [1]).

[1]) Для точнаго обоснованія послѣдняго преобразованія должно изслѣдовать возможность измѣненія порядка интеграціи въ многократныхъ интегралахъ съ безконечными предѣлами. Stolz первый, на сколько намъ извѣстно, коснулся этого предмета въ статьѣ: «Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurh sich ergebenden Grenzwerthen, dass einige derselben constanten Werthen sich nähern». Результаты Stolz'a могутъ быть распространены на нѣкоторые случаи неравномѣрной сходимости и на случай многократныхъ интеграловъ. Этому вопросу мы надѣемся посвятить особую статью.

Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ.

1. Подъ функціей $f(x)$ мы будемъ разумѣть функцію, обладающую слѣдующими свойствами. Для вещественныхъ значеній перемѣнной x, заключающихся въ промежуткѣ $-\varkappa \ldots +\varkappa$, гдѣ $\varkappa$ нѣкоторое конечное положительное число, эта функція однозначна, конечна, положительна и имѣетъ для каждаго значенія перемѣнной опредѣленную производную. Для вещественныхъ значеній, лежащихъ внѣ этого промежутка, $f(x)=o$. Сверхъ того $f(-x)=f(x)$.

Изъ допущенія существованія производной вытекаетъ, что функція непрерывна и, слѣдовательно, интегрируема въ каждомъ конечномъ промежуткѣ [1]). По той-же причинѣ будутъ интегрируемы и произведенія

$$f(\varepsilon) Cos\alpha\varepsilon \text{ и } f(\varepsilon)\varepsilon^n$$

Подъ функціей $\varphi(x)$ будемъ разумѣть функцію, опредѣляемую равенствомъ

$$\varphi(x) = \int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) Cos x\varepsilon \ .$$

Такъ какъ $f(-\varepsilon)=f(\varepsilon)$, то $\varphi(x) = 2\int_{0}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) Cos x\varepsilon$

и

$$\varphi(-x)=\varphi(x).$$

---

[1]) *Dini.* Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderichen reellen Grösse. Deutsch bearbeitet von Lüroth und Schepp. Leipzig 892. § 187.

Легко видѣть, что функція $\varphi(x)$ есть цѣлая трансцендентная функція. Въ самомъ дѣлѣ, рядъ

$$f(\varepsilon)Cos x\varepsilon = f(\varepsilon) - \frac{x^2\varepsilon^2}{2!}f(\varepsilon) + \frac{x^4\varepsilon^4}{4!}f(\varepsilon) \ldots$$

сходится равномѣрно, при каждомъ данномъ значеніи x, для всѣхъ конечныхъ значеній ε. Поэтому можно интегрировать этотъ рядъ почленно [1]). Такимъ образомъ, введя обозначенія

$$c_n = \int_0^{\mathrm{x}} d\varepsilon . \varepsilon^{2n} f(\varepsilon) \ ,$$

получимъ

$$\varphi(x) = 2\int_0^{\mathrm{x}} d\varepsilon f(\varepsilon) Cos x\varepsilon$$

$$= 2c_0 - \frac{2c_1}{2!}x^2 + \frac{2c_2}{4!}x^4 - \ldots$$

Но

$$c_n = \int_0^{\mathrm{x}} d\varepsilon . \varepsilon^{2n} f(\varepsilon) \leqq \mathrm{x}^{2n} \int_0^{\mathrm{x}} d\varepsilon f(\varepsilon) \quad ,$$

т. е.

$$c_n \leqq c_0 \mathrm{x}^{2n} \ .$$

Поэтому коэффиціенты ряда, выражающаго $\varphi(x)$ будутъ, по абсолютной величинѣ, не больше коэффиціентовъ ряда

$$2c_0 + 2c_0\frac{\mathrm{x}^2}{2!}x^2 + 2c_0\frac{\mathrm{x}^4}{4!}x^4 + \ldots$$

Но этотъ послѣдній рядъ сходится для всякаго конечнаго значенія x. Поэтому рядъ, выражающій $\varphi(x)$, обладаетъ тѣмъ-же

[1]) Dini. l. c. § 278.

свойствомъ, т. е. $\varphi(x)$ представляетъ цѣлую трансцендентную функцію.

2. Переходя къ теоріи ошибокъ, мы примемъ за исходную точку понятіе о вѣроятности предположенія, что ошибка наблюденія заключается между o и ε или равна меньшему изъ этихъ чиселъ и придадимъ этой вѣроятности слѣдующую форму

$$F(\varepsilon)=\left|\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha)\right|,$$

т. е.

$$F(\varepsilon)=\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha) \qquad \text{при } \varepsilon>o$$

$$F(\varepsilon)=\int_\varepsilon^0 d\alpha f(\alpha) \qquad \text{при } \varepsilon<o$$

Отсюда вѣроятность предположенія, что ошибка содержится между a и b или равна меньшему изъ нихъ, выражается такъ

$$\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right|$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть сначала будетъ $b>a$. Тогда возможны случаи: 1) $a>o$, 2) $a<o$, $b>o$, 3) $a<o$, $b<o$. Обозначимъ черезъ R вѣроятность, что ошибка заключается между a и b или равна меньшему изъ этихъ чиселъ. Тогда въ первомъ случаѣ

$$F(a)=\int_0^a d\alpha f(\alpha)\ , \quad F(b)=\int_0^b d\alpha f(\alpha)\ .$$

Но, по теоремѣ о сложеніи вѣроятностей, вѣроятность, что ошибка равна или больше O, но меньше b, равняется суммѣ вѣроятности,

что она равна или больше O, но меньше a и вѣроятности, что она равна или больше a, но меньше b, т. е.

$$F(b)=F(a)+R.$$

Отсюда

$$R=F(b)-F(a)=\int_a^b d\alpha f(\alpha)=\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right|.$$

Во второмъ случаѣ

$$F(a)=\int_a^0 d\alpha f(\alpha),\quad F(b)=\int_0^b d\alpha f(\alpha),$$

$$R=F(a)+F(b)=\int_a^b d\alpha f(\alpha)=\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right|.$$

Въ третьемъ случаѣ

$$F(a)=\int_a^0 d\alpha f(\alpha),\quad F(b)=\int_b^0 d\alpha f(\alpha),$$

$$F(a)=R+F(b),$$

$$R=F(a)-F(b)=\int_a^b d\alpha f(\alpha)=\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right|.$$

Пусть теперь будетъ $b<a$. Тогда, по только-что доказанному,

$$\left|\int_b^a d\alpha f(\alpha)\right|$$

выразитъ вѣроятность, что ошибка содержится между a и b или равна меньшему изъ этихъ чиселъ (въ данномъ случаѣ b).

Но

$$\left|\int_b^a d\alpha f(\alpha)\right|=\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right|$$

Слѣдовательно утвержденіе наше всегда справедливо.

Далѣе, мы предполагаемъ что никакая ошибка по абсолютной величинѣ не можетъ превосходить x, т. е. что значенія отъ $-x$ до $+x$ представляютъ всевозможныя значенія ошибки. Согласно съ этимъ мы должны предположить, что

$$\int_{-x}^{x} d\varepsilon f(\varepsilon) = 1 \quad , \qquad (1)$$

ибо лѣвая часть представляетъ вѣроятность, что ошибка содержится внутри предѣловъ $\pm x$, что достовѣрно. Замѣтимъ, что если функція $f_1(\varepsilon)$ не удовлетворяетъ этому требованію, то достаточно взять

$$f(\varepsilon) = k f_1(\varepsilon)$$

и выбрать k такъ, чтобы условіе (*1*) было удовлетворено. Для этого должно быть:

$$k \int_{-x}^{x} d\varepsilon f_1(\varepsilon) = 1$$

т. е.

$$k = \frac{1}{\int_{-x}^{x} d\varepsilon f_1(\varepsilon)} \quad .$$

Такъ какъ $f(-\varepsilon) = f(\varepsilon)$, то изъ (*1*) слѣдуетъ, что

$$\int_{0}^{x} d\varepsilon f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

3. **Теорема.** Вѣроятность, что сумма

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n,$$

гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$—величины ошибокъ, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$—данныя числа, заключается между предѣлами $\pm v$, выражается формулой

$$P = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\alpha \Phi(\alpha) \frac{Sin \alpha v}{\alpha} \quad ,$$

гдѣ $$\Phi(\alpha)=\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha).$$

Доказательство. Вѣроятность, что ошибка наблюденія содержится между ε и $\varepsilon+d\varepsilon$ выражается, по *2*, такъ:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+d\varepsilon} d\alpha f(\alpha)\right|$$

или, при $$d\varepsilon>o,$$

$$d\varepsilon f(\varepsilon+\theta d\varepsilon),$$

гдѣ $$o<\theta<1.$$

Поэтому вѣроятность, что при n наблюденіяхъ получились ошибки, заключающіяся между ε_1 и $\varepsilon_1+d\varepsilon_1$, ε_2 и $\varepsilon_2+d\varepsilon_2$,.. ε_n и $\varepsilon_n+d\varepsilon_n$ выразится, по теоремѣ объ умноженіи вѣроятностей, произведеніемъ

$$f(\varepsilon_1+\theta_1 d\varepsilon_1)f(\varepsilon_2+\theta_2 d\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n+\theta_n d\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_n. \quad (1)$$

Вообразимъ теперь, что каждое изъ чиселъ ε_v принимаетъ значенія, образующія ариѳметическую прогрессію съ разностью $d\varepsilon_v$ и содержащіяся между $-\varkappa$ и $+\varkappa$. Возьмемъ сумму выраженій, подобныхъ (*1*), распространяя суммованіе на всѣ значенія ε_v, удовлетворяющія условію

$$-\upsilon<\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n<\upsilon. \quad (2)$$

Такимъ образомъ получимъ выраженіе

$$\sum\sum\ldots\sum f(\varepsilon_1+\theta_1 d\varepsilon_1)f(\varepsilon_2+\theta_2 d\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n+\theta_n d\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_n,$$

представляющее вѣроятность, что ошибки $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\varepsilon_n$ содержатся внутри области, границы которой опредѣляются разсматриваемыми значеніями ε_v, удовлетворяющими условію (*2*). Если перейдемъ къ предѣлу, отвѣчающему $\lim d\varepsilon_v=o$, то получимъ вѣроятность,

что ошибки удовлетворяютъ условію (2). Предѣлъ этотъ будетъ

$$P=\int\int\ldots\int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_n f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n),$$

гдѣ интеграція распространяется на всѣ значенія $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, удовлетворяющія условію (2). Къ этому интегралу приложимъ преобразованіе Dirichlet[1]), основанное на свойствѣ интеграла

$$J=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha}e^{i\alpha(\lambda_1\varepsilon_1+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n)}$$

водиться къ 1 для значеній ε_ν, для которыхъ

$$\lambda_1\varepsilon_1+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n$$

заключается между $-\upsilon$ и $+\upsilon$; и—къ нулю для значеній, для которыхъ это выраженіе заключается внѣ того-же промежутка. Такимъ образомъ получимъ:

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha}\int_{-x}^{x}d\varepsilon_1 f(\varepsilon_1)e^{i\alpha\lambda_1\varepsilon_1}\ldots\ldots\int_{-x}^{x}d\varepsilon_n f(\varepsilon_n)e^{i\alpha\lambda_n\varepsilon_n}.$$

Замѣтивъ, что $f(-\varepsilon)=f(\varepsilon)$, и поэтому

$$\int_{-x}^{x}d\varepsilon f(\varepsilon)Sin\alpha\varepsilon=o,$$

находимъ, что

$$\int_{-x}^{x}d\varepsilon f(\varepsilon)e^{i\alpha\varepsilon}=\int_{-x}^{x}d\varepsilon f(\varepsilon)Cos\alpha\varepsilon=\varphi(\alpha).$$

[1]) См. Meyer. Vorlesungen über die Theorie der best. Int. §§. 174, 175.

Положивъ

$$\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha)=\Phi(\alpha),$$

находимъ

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha}.$$

Но

$$\varphi(-\alpha)=\varphi(\alpha)$$

Поэтому

$$\Phi(-\alpha)=\Phi(\alpha).$$

и, слѣдовательно,

$$P=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha}.$$

4. **Теорема.** Если $x<\frac{1}{\chi}$, то

$$\varphi(x)=e^{-\zeta cx^2},\text{ гдѣ } c=\int_0^\chi d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon)\text{ и}$$

$$1-\left(\frac{x\chi}{2}\right)^2<\zeta<\frac{1}{1-cx^2}.$$

Доказательство. Такъ какъ

$$Cosx\varepsilon=1-2Sin^2\frac{x\varepsilon}{2},$$

то

$$\varphi(x)=2\int_0^\chi d\varepsilon f(\varepsilon)Cosx\varepsilon=2\int_0^\chi d\varepsilon f(\varepsilon)-4\int_0^\chi d\varepsilon f(\varepsilon)Sin^2\frac{x\varepsilon}{2}$$

Но, по 2[(2)],

$$\int_0^\chi d\varepsilon f(\varepsilon)=\frac{1}{2}.$$

Поэтому будетъ

$$\varphi(x)=1-\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2 Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2 . \qquad (1)$$

Приложивъ теорему

$$\psi(\xi)=\psi(o)+\xi\psi'(\eta\xi) , \quad o<\eta<1 \qquad (2)$$

къ функціи

$$\psi(\xi)=log(1-\xi) ,$$

имѣемъ

$$log(1-\xi)=-\xi\frac{1}{1-\eta\xi}=-\rho\xi \qquad (3)$$

при условіи

$$o<\xi<1 . \qquad (4)$$

При этомъ

$$\rho=\frac{1}{1-\eta\xi}$$

содержится между 1 и $\frac{1}{1-\xi}$, т. е.

$$\frac{1}{1-\xi}>\rho>1 . \qquad (5)$$

Изъ (3) слѣдуетъ

$$1-\xi=e^{-\rho\xi} . \qquad (6)$$

Чтобы съ помощью равенства (6) преобразовать правую часть равенства (1), должно положить

$$\xi=\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\, Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2$$

и убѣдиться, что условіе (4) будетъ при этомъ удовлетворено.

Такъ какъ $f(\varepsilon)>o$ между предѣлами интеграціи, то ясно, что будетъ $\xi>o$. Съ другой стороны

$$\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2 < x^2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon),$$

т. е.

$$\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2 < cx^2\,. \qquad (7)$$

Но

$$c=\int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) < \varkappa^2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\,,$$

т. е.

$$c<\frac{1}{2}\varkappa^2\,.$$

Кромѣ того дано, что $x<\frac{1}{\varkappa}$. Поэтому

$$cx^2<\frac{1}{2}\,.$$

Теперь изъ (7) видно, что условіе (4) выполняется. Прилагая равенство (6), находимъ изъ (1)

$$\varphi(x)=e^{-\rho\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2}, \qquad (8)$$

$$1<\rho<\frac{1}{1-\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2}\,. \qquad (9)$$

Имѣя въ виду неравенство (7), положимъ

$$\rho\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2=\zeta c x^2\ .$$

Отсюда

$$\zeta=\frac{\rho}{cx^2}\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2\ . \qquad (10)$$

Равенство (8) обратится теперь въ

$$\varphi(x)=e^{-\zeta c x^2}\ ,$$

гдѣ ζ опредѣляется равенствомъ (10). Остается изслѣдовать ζ. Съ этой цѣлью обратимся опять къ теоремѣ (2). Полагая

$$\psi(\xi)=2\,Sin\frac{\xi}{2}\ ,$$

находимъ

$$2\,Sin\frac{\xi}{2}=\xi Cos\frac{\eta\xi}{2}\ .$$

Отсюда

$$2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}=x\varepsilon Cos\frac{\eta x\varepsilon}{2}\ .$$

Поэтому (10) даетъ

$$\zeta=\frac{\rho}{c}\int_0^x d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) Cos^2\frac{\eta x\varepsilon}{2}\ . \qquad (11)$$

Но

$$\eta x\varepsilon < x\varkappa \text{ и } x\varkappa < 1\ .$$

Отсюда

$$\frac{\eta x\varepsilon}{2}<\frac{x\varkappa}{2}$$

и оба эти числа меньше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$1 > Cos\frac{\eta x\varepsilon}{2} > Cos\frac{x\varkappa}{2}.$$

Слѣдовательно

$$\int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) > \int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) Cos^2\frac{\eta x\varepsilon}{2} > Cos^2\frac{x\varkappa}{2}\int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon),$$

т. е.

$$c > \int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) Cos^2\frac{\eta x\varepsilon}{2} > c\,Cos^2\frac{x\varkappa}{2}.$$

Умножая на $\frac{\rho}{c}$ и пользуясь равенствомъ (11), находимъ

$$\rho > \zeta > \rho Cos^2\frac{x\varkappa}{2}.$$

Принимая-же въ соображеніе (9), находимъ

$$\frac{1}{1-\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2} > \zeta > Cos^2\frac{x\varkappa}{2}. \qquad (12)$$

Такъ какъ $\frac{x\varkappa}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $Cos\frac{x\varkappa}{2} > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2$

и, слѣдовательно,

$$Cos^2\frac{x\varkappa}{2} > 1 - \left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^4,$$

т. е.

$$Cos^2\frac{x\varkappa}{2}>1-\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2. \qquad (13)$$

Далѣе, изъ (7) слѣдуетъ, что

$$1-\int_0^\varkappa d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2>1-cx^2.$$

Такъ какъ $cx^2<1$, то обѣ части этого неравенства $>o$ и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{1-\int_0^\varkappa d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2}<\frac{1}{1-cx^2}. \qquad (14)$$

При помощи (13) и (14) находимъ изъ (12)

$$\frac{1}{1-cx^2}>\zeta>1-\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2.$$

5. **Теорема.** Функція $\varphi(x)$ при вещественныхъ значеніяхъ x всегда удовлетворяетъ неравенству

$$\varphi^2(x)\leqq\frac{1}{1+rx^2},$$

гдѣ $r>o$ и не зависитъ отъ x.

Доказательство. Положивъ

$$\varphi^2(x)=\frac{1}{1+x^2\psi(x)} \qquad (1)$$

и обозначивъ чрезъ r нижній предѣлъ значеній функціи $\psi(x)$, отвѣчающихъ вещественнымъ значеніямъ x, находимъ послѣдовательно

$$\psi(x)\geqq r,$$

$$1+x^2\psi(x)\geqq1+rx^2.$$

Отсюда, въ предположеніи, что

$$1+rx^2>o, \tag{2}$$

находимъ

$$\frac{1}{1+x^2\psi(x)}\leqq\frac{1}{1+rx^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi^2(x)\leqq\frac{1}{1+rx^2}\ .$$

Остается показать, что $r>o$; такъ какъ въ такомъ случаѣ условіе (2) будетъ также выполнено и теорема будетъ доказана.

Вопросъ приводится къ изслѣдованію функціи $\psi(x)$. Изъ (1) находимъ

$$\psi(x)=\frac{1}{x^2\varphi^2(x)}-\frac{1}{x^2}\ .$$

Такъ какъ

$$\varphi(-x)=\varphi(x),$$

то и

$$\psi(-x)=\psi(x)$$

и, слѣдовательно, достаточно предположить, что x измѣняется отъ 0 до ∞. Изслѣдуемъ сначала $\psi(x)$ вблизи значенія $x=o$ Изъ предыдущей теоремы знаемъ, что при $x<\frac{1}{\varkappa}$, будетъ

$$\varphi(x)=e^{-\zeta cx^2},\ \text{гдѣ}\ \zeta>1-\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Поэтому

$$\psi(x)=\frac{1}{x^2}\left\{e^{2\zeta cx^2}-1\right\}>2\zeta c\ .$$

Но $x<\frac{1}{\varkappa}$, слѣдовательно $\frac{x\varkappa}{2}<\frac{1}{2}$.

Поэтому, изъ (3),

$$\zeta > \frac{3}{4}$$

и, слѣдовательно,

$$\psi(x) > \frac{3c}{2} \text{ при } x < \frac{1}{\varkappa}.$$

Изслѣдуемъ теперь $\psi(x)$ вблизи $x = \infty$. Интегрируя по частямъ, находимъ изъ равенства

$$\varphi(x) = 2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) Cos x\varepsilon$$

равенство

$$\varphi(x) = 2\frac{f(\varkappa) Sin x\varkappa - \int_0^{\varkappa} d\varepsilon f'(\varepsilon) Sin x\varepsilon}{x}.$$

Слѣдовательно

$$x\varphi(x) = 2f(\varkappa) Sin x\varkappa - 2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f'(\varepsilon) Sin x\varepsilon.$$

Отсюда

$$|x\varphi(x)| \leq 2f(\varkappa) + 2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon |f'(\varepsilon)|.$$

Но извѣстно, что если функція интегрируема, то и абсолютная величина ея также [1]. Поэтому правая часть представляетъ опредѣленную конечную величину L, положительную и независящую отъ x и

$$|x\varphi(x)| \leq L.$$

---

[1]) Dini. l. c. § 190. 15.

Поэтому

$$\frac{1}{x^2\varphi^2(x)} \geqq \frac{1}{L^2}$$

и, если предположимъ, что

$$x > \sqrt{2}\, L,$$

то будетъ

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2L^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\psi(x) = \frac{1}{x^2\varphi^2(x)} - \frac{1}{x^2} > \frac{1}{2L^2} \;.$$

Теперь легко показать, что нижній предѣлъ $\psi(x)$ больше O. Допустимъ противное, т. е. допустимъ, что $r = o$. По извѣстной теоремѣ [1]) существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно значеніе перемѣнной $x = x_0$, обладающее свойствомъ, что въ сколь угодно маломъ промежуткѣ, заключающемъ его, могутъ быть найдены значенія перемѣнной, для которыхъ $\psi(x)$ сколь угодно близка къ O. Такое значеніе x_0, должно быть $\geqq \frac{1}{\varkappa}$ и $\leqq L\sqrt{2}$, ибо внѣ этого промежутка функція $\psi(x)$, какъ мы только что доказали, остается больше нѣкотораго положительнаго числа. Такъ какъ $\psi(x)$—цѣлая трансцендентная функція [*1*], то внутри разсматриваемаго промежутка она можетъ обратиться въ O лишь конечное число разъ. Сверхъ того каждое изъ значеній x, обращающихъ $\varphi(x)$ въ O, можетъ быть выдѣлено при помощи промежутка $x - h \ldots x + h$, гдѣ $h > o$ и притомъ такое число, что для всѣхъ значеній внутри этого промежутка

$$|x)| < \varepsilon, \varphi)$$

---

[1]) Dini. l. c. § 36.

гдѣ ε — данное число. Тогда внутри того-же промежутка будетъ

$$\frac{1}{\varphi^2(x)} > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

и, слѣдовательно, значеніе x_0 не можетъ лежать внутри него. Если исключимъ всѣ такіе промежутки, то x_0 должно лежать въ одномъ изъ оставшихся промежутковъ. Но въ каждомъ изъ этихъ послѣднихъ $\frac{1}{\varphi(x)}$, а вмѣстѣ съ ней и $\psi(x)$ непрерывна. Поэтому, по извѣстной теоремѣ [1]), $\psi(x)$ должна достигать своего нижняго предѣла, т. е. должно быть

$$\psi(x_0) = o.$$

Отсюда

$$\varphi^2(x_0) = 1,$$

т. е.

$$\varphi(x_0) = \pm 1 \; .$$

Если предположить, что $\varphi(x_0) = 1$, то изъ зависимости

$$\varphi(x_0) = 1 - \int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\, Sin\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2$$

слѣдуетъ, что

$$\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\, Sin\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2 = o \; . \qquad (4)$$

Если-же предположить, что

$$\varphi(x_0) = -1 \; ,$$

то

$$\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\, Sin\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2 = 2 \qquad (5)$$

[1]) Dini. l. c. § 47.

Но

$$\int_0^x df\varepsilon(\varepsilon)\left(2\,Cos\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2+\int_0^x d\xi f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2=4\int_0^x d\xi f(\varepsilon)=2$$

и, слѣдовательно, (5) даетъ

$$\int_0^x d\xi f(\varepsilon)\left(2\,Cos\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2=o\ . \qquad (6)$$

Итакъ должно выполняться (4) или (6). Но ни то, ни другое невозможно въ силу предположеній о функціи $f(\varepsilon)$ [1]. Итакъ должно быть $r>o$.

6. **Теорема**: Если λ_0—наименьшее, а λ—наибольшее изъ чиселъ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$, если n превышаетъ большее изъ чиселъ 4 и $2\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$, а θ превышаетъ большее изъ чиселъ

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r(n\lambda_0^2-2\lambda^2)}} \text{ и } \frac{2}{\lambda_0\sqrt{r(n-4)}}\ ,$$

то выраженіе

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha}$$

можетъ быть замѣнено выраженіемъ

$$P_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha}\,,$$

причемъ будетъ

$$|P-P_1|\leq\frac{1}{\pi\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}}$$

---

[1]) Din. l. c. § 190, 13.

гдѣ

$$\mathfrak{R}=\frac{1}{2}\,\frac{r\Lambda\theta^2}{1+r\lambda^2\theta^2}$$

$$\Lambda=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2\ .$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нужно разсматривать разность

$$P-P_1=\frac{2}{\pi}\int_\theta^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha}\ .$$

Имѣемъ

$$|P-P_1|\leqq\frac{2}{\pi}\int_\theta^\infty d\alpha\frac{|\Phi(\alpha)|}{\alpha}\ . \quad (1)$$

Здѣсь

$$\Phi(\alpha)=\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha) \quad (2)$$

Но, по 5,

$$\varphi^2(\lambda_p\alpha)\leqq\frac{1}{1+r\lambda_p^2\alpha^2}\ .$$

Поэтому

$$|\Phi(\alpha)|\leqq\frac{1}{\left|\sqrt{(1+r\lambda_1^2\alpha^2)\ldots(1+r\lambda_n^2\alpha^2)}\right|},$$

$$\frac{1}{|\Phi(\alpha)|}\geqq\left|\sqrt{(1+r\lambda_1^2\alpha^2)\ldots(1+r\lambda_n^2\alpha^2)}\right|,$$

$$log\frac{1}{|\Phi(\alpha)|}\geqq\frac{1}{2}\left\{log(1+r\lambda_1^2\alpha^2)+\ldots+log(1+r\lambda_n^2\alpha^2)\right\}\ . \quad (3)$$

Чтобы преобразовать правую часть послѣдняго неравенства, разсмотримъ выраженіе

$$\chi(\xi)=\frac{1}{2}\,\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\xi\alpha^2}+\frac{1}{n}log(1+r\xi\alpha^2)\ .$$

Имѣемъ

$$\chi'(\xi) = -\frac{nr\lambda_p^2 a^2 - 2r\xi a^2 - 2}{2n(1+r\xi a^2)^2} ra^2 . \qquad (4)$$

Сравнивая числителя правой части съ выраженіемъ

$$nr\lambda_0^2\theta^2 - 2r\lambda^2\theta^2 - 2,$$

гдѣ θ—нѣкоторое число, находимъ тождество

$$nr\lambda_p^2 a^2 - 2r\xi a^2 - 2 = nr\lambda_0^2\theta^2 - 2r\lambda^2\theta^2 - 2$$

$$+ nra^2(\lambda_p^2 - \lambda_0^2) + r(n\lambda_0^2 - 2\lambda^2)(a^2 - \theta^2) + 2ra^2(\lambda^2 - \xi) .$$

Такъ какъ $\lambda_p \gtreqless \lambda_0$, то при $a \geqq \theta$, если $n > \frac{2\lambda^2}{\lambda_0^2}$, будемъ имѣть

$$nr\lambda_p^2 a^2 - 2r\xi a^2 - 2 > o$$

при всѣхъ значеніяхъ

$$\xi \lesseqgtr \lambda^2,$$

коль скоро θ будетъ выбрано такъ, чтобы

$$nr\lambda_0^2\theta^2 - 2r\lambda^2\theta^2 - 2 > o ,$$

т. е.

$$\theta > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(n\lambda_0^2 - 2\lambda^2)r}} .$$

Итакъ, при перечисленныхъ условіяхъ, будетъ

$$\chi'(\xi) < o.$$

Поэтому $\chi(\xi)$ убываетъ съ возрастаніемъ ξ, пока ξ не превосходитъ λ^2. Поэтому

$$\chi(\lambda^2) \leqq \chi(\lambda_p^2) ,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}+\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2)\leqq\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda_p^2\alpha^2}+\frac{1}{n}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2).$$

Вычитая обѣ части этого неравенства изъ

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2) ,$$

находимъ:

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}-\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2)\geqq$$

$$\frac{n-2}{2n}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda_p^2\alpha^2}. \qquad (6)$$

Но, при $x>o$, $log(1+x)>\frac{2x}{2+x}$, что слѣдуетъ изъ того, что функція $log(1+x)-\frac{2x}{2+x}$ равна o при $x=o$, а производная ея равна $\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$, т. е. $>o$ при $x>o$. Примѣняя это неравенство ко второй части (6), получаемъ

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}-\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2)$$

$$\geqq\frac{n-2}{n}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{2+r\lambda_p^2\alpha^2}-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda_p^2\alpha^2}$$

или

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}-\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2) \qquad (7)$$

$$\geqq\frac{(n-4)r\lambda_p^2\alpha^2-4}{2n(1+r\lambda_p^2\alpha^2)(2+r\lambda_p^2\alpha^2)}r\lambda_p^2\alpha^2.$$

Сравнивая числителя правой части съ выраженіемъ

$$(n-4)r\lambda_0^2\theta^2-4,$$

гдѣ θ—нѣкоторое число, находимъ тождество

$$(n-4)r\lambda_p^2\alpha^2-4=(n-4)r\lambda_0^2\theta^2-4$$

$$+(n-4)r\alpha^2(\lambda_p^2-\lambda_0^2)+(n-4)r\lambda_0^2(\alpha^2-\theta^2).$$

Откуда, такъ какъ $\lambda_p\geqq\lambda_0$, видимъ, что, при $n>4$ и $\alpha\geqq\theta$, будетъ всегда

$$(n-4)r\lambda_p^2\alpha^2-4>o\ ,$$

коль скоро θ будетъ выбрано такъ, чтобы

$$(n-4)r\lambda_0^2\theta^2-4>o\ ,$$

т. е.

$$\theta>\frac{2}{\lambda_0\sqrt{(n-4)r}}.$$

При этомъ условіи правая часть неравенства (7) будетъ положительна. Поэтому лѣвая часть также будетъ положительна. Итакъ, если числа n и θ удовлетворяютъ условіямъ, указаннымъ въ теоремѣ, то, при $\alpha\geqq\theta$, будетъ:

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)>\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}+\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2).$$

Придавая p въ этомъ неравенствѣ значенія $1,2,\ldots n$ и складывая полученные результаты, находимъ:

$$\frac{1}{2}\left\{log(1+r\lambda_1^2\alpha^2)+\ldots+log(1+r\lambda_n^2\alpha^2)\right\}>$$

$$\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}+log(1+r\lambda^2\alpha^2).$$

Возвращаясь теперь къ неравенству (3), находимъ, при помощи только что найденнаго неравенства,

$$log\frac{1}{|\Phi(\alpha)|}>\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}+log(1+r\lambda^2\alpha^2).$$

Откуда

$$\frac{1}{|\Phi(\alpha)|}>(1+r\lambda^2\alpha^2)e^{\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}$$

и

$$|\Phi(\alpha)|<\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}$$

для $\alpha\geqq\theta$. Слѣдовательно, по (1),

$$|P-P_1|\leqq\frac{2}{\pi}\int_\theta^\infty d\alpha\ \frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}\cdot\frac{e}{\alpha}^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}. \qquad (8)$$

Для преобразованія правой части введемъ новую перемѣнную ξ, полагая

$$\xi=\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}.$$

Отсюда

$$1-\frac{2\lambda^2}{\Lambda}\xi=\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2},\quad d\xi=\frac{r\Lambda\alpha d\alpha}{(1+r\lambda^2\alpha^2)^2},$$

$$\frac{d\xi}{\xi}=\frac{2d\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2},\quad \frac{2d\alpha}{\alpha}=\frac{d\xi}{\xi\left(1-\frac{2\lambda^2}{\Lambda}\xi\right)}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}=\left(1-\frac{2\lambda^2}{\Lambda}\xi\right)e^{-\xi},$$

$$\frac{2d\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}=\frac{d\xi}{\xi}e^{-\xi} \qquad (9)$$

При $\alpha>o$ и $d\alpha>o$ имѣемъ

$$d\xi>o.$$

Поэтому ξ, т. е. $\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}$, возрастаетъ вмѣстѣ съ α и, слѣдовательно, при $\alpha\overline{\gtrless}\theta$

$$\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}>\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\theta^2}{1+r\lambda^2\theta^2},$$

т. е.

$$\xi\geq\mathfrak{N}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{\xi}\leq\frac{1}{\mathfrak{N}}.$$

Поэтому (9) даетъ

$$\frac{2d\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}\leq\frac{d\xi}{\mathfrak{N}}e^{-\xi}.$$

Предѣламъ θ и ∞ отвѣчаютъ предѣлы

$$\mathfrak{N} \text{ и } \frac{\Lambda}{2\lambda^2}.$$

Поэтому (8) даетъ

$$|P-P_1|\leq\frac{1}{\pi\mathfrak{N}}\int_{\mathfrak{N}}^{\frac{\Lambda}{2\lambda^2}}d\xi\, e^{-\xi}.$$

Интегралъ, входящій въ правую часть неравенства, равенъ

$$e^{-\mathfrak{N}}-e^{-\frac{\Lambda}{2\lambda^2}}$$

и, поэтому, меньше, чѣмъ $e^{-\mathfrak{N}}$. Итакъ

$$|P-P_1|\leqq\frac{1}{\pi\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}}.$$

7 **Теорема.** Если $\theta<\frac{1}{\lambda\varkappa}$, то P_1 можно замѣнить выраженіемъ

$$P_2=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2}\frac{Sin\alpha v}{\alpha},$$

причемъ будетъ

$$|P_1-P_2|\leqq\frac{2h\sqrt{3}}{\pi}log\left(\frac{\theta v}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{\theta^2v^2}{3}}\right),$$

гдѣ h означаетъ большее изъ чиселъ

$$e^{\frac{1}{4}c\Lambda\lambda^2\theta^4\varkappa^2}-1 \text{ и } 1-e^{-\frac{c^2\lambda^2\Lambda\theta^4}{1-c\lambda^2\theta^2}}.$$

Доказательство. Мы должны изслѣдовать разность

$$P_1-P_2=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\left(\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}\right)\frac{Sin\alpha v}{\alpha}. \quad (1)$$

Съ этой цѣлью представимъ $\Phi(\alpha)$ въ формѣ показательной функціи. Мы видѣли, что

$$\varphi(\alpha)=e^{-\zeta c\alpha^2},$$

гдѣ

$$1-\left(\frac{\alpha\varkappa}{2}\right)^2<\zeta<\frac{1}{1-c\alpha^2}$$

при условіи $\alpha<\frac{1}{\varkappa}$. Отсюда

$$\Phi(\alpha)=\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha)=e^{-(\zeta_1\lambda_1^2+\ldots+\zeta_n\lambda_n^2)c\alpha^2}$$

при условіи $\lambda_\nu\alpha<\frac{1}{\varkappa}$, $\nu=1,\ 2,\ldots. n$. Это послѣднее условіе будетъ выполнено, если $\lambda\alpha<\frac{1}{\varkappa}$, т. е. $\alpha<\frac{1}{\lambda\varkappa}$. (2)

Положимъ теперь

$$\zeta_1\lambda_1^2+\ldots+\zeta_n\lambda_n^2=\zeta(\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2)=\zeta\Lambda.$$

Число ζ будетъ среднимъ между числами $\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n$. Тогда будемъ имѣть

$$\Phi(\alpha)=e^{-\zeta\Lambda c\alpha^2}. \qquad (3)$$

Такъ какъ

$$1-\left(\frac{\alpha\lambda_\nu\varkappa}{2}\right)^2<\zeta_\nu<\frac{1}{1-c\lambda_\nu^2\alpha^2}$$

и, такъ какъ, по причинѣ $\lambda\geq\lambda_\nu$, имѣемъ

$$\frac{1}{1-c\lambda_\nu^2\alpha^2}<\frac{1}{1-c\lambda^2\alpha^2} \text{ и } 1-\left(\frac{\alpha\lambda_\nu\varkappa}{2}\right)^2>1-\left(\frac{\alpha\lambda\varkappa}{2}\right)^2,$$

то будетъ и подавно

$$1-\left(\frac{\alpha\lambda\varkappa}{2}\right)^2<\zeta_\nu<\frac{1}{1-c\lambda^2\alpha^2}.$$

Поэтому и

$$1-\left(\frac{\alpha\lambda\varkappa}{2}\right)^2<\zeta<\frac{1}{1-c\lambda^2\alpha^2}\ .$$

Введемъ вмѣсто ζ число $\delta=1-\zeta$. Вычитая предыдущія неравенства изъ 1, найдемъ

$$-\frac{c\lambda^2\alpha^2}{1-c\lambda^2\alpha^2}<\delta<\left(\frac{\alpha\lambda\varkappa}{2}\right)^2\ . \qquad (4)$$

Составимъ теперь разность $\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}$, входящую въ выраженіе (1). На основаніи (3) имѣемъ:

$$\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}=e^{-c\Lambda\zeta\alpha^2}-e^{-c\Lambda\alpha^2}$$

или

$$\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}=e^{-c\Lambda\alpha^2}\left(e^{\delta c\Lambda\alpha^2}-1\right). \qquad (5)$$

Возьмемъ число θ, удовлетворяющее условію

$$\theta<\frac{1}{\lambda\varkappa}\ .$$

Тогда для всякого $\alpha\leqq\theta$ будетъ выполнено условіе (2) и, слѣдовательно, будутъ справедливы всѣ предыдущія неравенства. Лѣвая часть неравенства (4) равна

$$1-\frac{1}{1-c\lambda^2\alpha^2}$$

и, слѣдовательно, убываетъ съ увеличеніемъ α; а правая часть того-же неравенства возрастаетъ съ увеличеніемъ α. Поэтому при $\alpha\lesseqgtr\theta$ будетъ

$$-\frac{c\lambda^2\theta^2}{1-c\lambda^2\theta^2}<\delta<\left(\frac{\lambda\theta\varkappa}{2}\right)^2\ . \qquad (6)$$

Предположимъ сначала, что $\delta > o$. Изъ предыдущаго неравенства имѣемъ

$$\delta < \left(\frac{\lambda\theta x}{2}\right)^2 .$$

Отсюда, такъ какъ $\alpha \overline{\gtrless} \theta$,

$$e^{\delta c\Lambda\alpha^2} < e^{\frac{1}{4}c\Lambda\lambda^2\theta^4 x^2} .$$

Поэтому

$$e^{\delta c\Lambda\alpha^2} - 1 < e^{\frac{1}{4}c\Lambda\lambda^2\theta^4 x^2} - 1 . \qquad (7)$$

Пусть теперь будетъ $\delta < o$. Тогда, по (6), имѣемъ

$$\delta > -\frac{c\lambda^2\theta^2}{1-c\lambda^2\theta^2} .$$

Отсюда, такъ какъ $\alpha \leqq \theta$, будетъ $-\delta c\Lambda\alpha^2 < \frac{c^2\lambda^2\Lambda\theta^4}{1-c\lambda^2\theta^2}$.
Поэтому

$$e^{\delta c\Lambda\alpha^2} > e^{-\frac{c^2\lambda^2\Lambda\theta^4}{1-c\lambda^2\theta^2}} .$$

Откуда

$$1-e^{\delta c\Lambda\alpha^2} < 1-e^{-\frac{c^2\lambda^2\Lambda\theta^4}{1-c\lambda^2\theta^2}} . \qquad (8)$$

Сопоставляя неравенства (7) и (8) и вспомнивъ значеніе h, находимъ

$$\left|e^{\delta c\Lambda\alpha^2} - 1\right| < h .$$

Поэтому изъ (5) находимъ

$$\left|\Phi(\alpha) - e^{-c\Lambda\alpha^2}\right| < h e^{-c\Lambda\alpha^2} . \qquad (9)$$

Обращаясь теперь къ равенству (1), находимъ

$$|P_1-P_2|<\frac{2\upsilon}{\pi}\int\limits_0^\theta d\alpha\left|\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}\right|\left|\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha\upsilon}\right| .$$

Слѣдовательно, по (9),

$$|P_1-P_2|\leqq\frac{2h\upsilon}{\pi}\int\limits_0^\theta d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2}\left|\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha\upsilon}\right|$$

или, такъ какъ $e^{-c\Lambda\alpha^2}\leqq 1$,

$$|P_1-P_2|\leqq\frac{2h\upsilon}{\pi}\int\limits_0^\theta d\alpha\left|\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha\upsilon}\right| . \qquad (10)$$

Остается изслѣдовать $\frac{Sin x}{x}$. Разложивъ это выраженіе въ степенной рядъ, видимъ, что первые члены разложенія совпадаютъ съ первыми членами разложенія функціи

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}}\,:$$

Точное сравненіе этихъ функцій показываетъ, что

$$\left|\frac{Sin x}{x}\right|\leqq\frac{1}{\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}\right|} . \qquad (11)$$

Докажемъ это неравенство. Для этого будемъ различать два случая: 1) $x\leqq\pi$ и 2) $x>\pi$. Разсмотримъ первый случай. Непосредственно видно, что (11) справедливо при $x=o$ и $x=\pi$. Поэтому будемъ предполагать, что $o<x<\pi$. Доказываемое

неравенство можетъ быть написано такъ: $\frac{x^2}{Sin^2x} > 1 + \frac{x^2}{3}$, т. е. $\psi(x) > o$, если положимъ

$$\psi(x) = \frac{x^2}{Sin^2x} - 1 - \frac{x^2}{3}\ .$$

Отсюда

$$\frac{3Sin^3x}{2x}\psi'(x) = 3Sinx - Sin^3x - 3xCosx\ .$$

Если докажемъ, что правая часть $> o$, то отсюда будетъ слѣдовать, что $\psi'(x) > o$, т. е. $\psi(x)$ возрастаетъ. Такъ какъ $\psi(o) = o$, то будетъ

$$\psi(x) > o\ .$$

Поэтому вопросъ приводится къ доказательству неравенства

$$3Sinx - Sin^3x - 3xCosx > o\ .$$

Въ справедливости-же этого неравенства убѣждаемся, замѣтивъ, что лѣвая часть его равна o при $x = o$ и возрастаетъ съ возрастаніемъ x отъ o до π, потому что производная ея равна

$$3Sinx[x - SinxCosx]$$

или

$$\frac{3}{2}Sinx\Big[2x - Sin2x\Big]$$

и остается положительной для $x < \pi$. Итакъ неравенство (11) справедливо при $x \leq \pi$. Остается доказать его для $x > \pi$. Замѣтивъ, что

$$\left|\frac{Sinx}{x}\right| < \frac{1}{x}\ ,$$

видимъ, что достаточно будетъ доказать справедливость неравенства

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}\right|}.$$

Разрѣшая это неравенство, находимъ, что оно будетъ выполнено, если

$$x > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Такъ какъ

$$\pi > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

то, для $x > \pi$, доказываемое неравенство будетъ справедливо. Итакъ неравенство (11) справедливо. Поэтому изъ (10) находимъ

$$|P_1 - P_2| \leqq \frac{2h\upsilon}{\pi} \int_0^\theta d\alpha \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\alpha\upsilon)^2}{3}}}$$

или, такъ какъ правая часть равна

$$\frac{2h\sqrt{3}}{\pi} \int_0^{\frac{\theta\upsilon}{\sqrt{3}}} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

т. е.

$$\frac{2h\sqrt{3}}{\pi} log\left(\frac{\theta\upsilon}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{\theta^2\upsilon^2}{3}}\right),$$

$$|P_1 - P_2| \leqq \frac{2h\sqrt{3}}{\pi} log\left(\frac{\theta\upsilon}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{\theta^2\upsilon^2}{3}}\right).$$

8. **Теорема.** Выраженіе P_2 можно замѣнить выраженіемъ

$$P_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v}{2\sqrt{c\Lambda}}} d\alpha e^{-\alpha^2},$$

причемъ будетъ

$$|P_2 - P_3| \overline{\gtrless} \frac{e^{-c\Lambda\theta^2}}{\pi c\Lambda\theta^2}.$$

Доказательство. Во первыхъ замѣтимъ, что, по извѣстному преобразованію,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v}{2\sqrt{c\Lambda}}} d\alpha e^{-\alpha^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2} \frac{Sin\alpha v}{\alpha}.$$

Поэтому

$$P_3 - P_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\infty} d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2} \frac{Sin\alpha v}{\alpha},$$

или

$$P_3 - P_2 = -\frac{1}{\pi c\Lambda} \int_{\theta}^{\infty} d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2} (-2c\Lambda\alpha) . \frac{1}{\alpha^2} Sin\alpha v$$

$$= \frac{1}{\pi c\Lambda} \int_{\infty}^{\theta} d\left(e^{-c\Lambda\alpha^2}\right) . \frac{1}{\alpha^2} Sin\alpha v.$$

Отсюда, такъ какъ $\frac{1}{\alpha^2} \leqq \frac{1}{\theta^2}$ и $|Sin\alpha v| \leqq 1$,

$$|P_2 - P_3| \leqq \frac{1}{\pi c\Lambda\theta^2} \int_{\infty}^{\theta} d(e^{-c\Lambda\alpha^2}),$$

т. е.

$$|P_2 - P_3| \leq \frac{e^{-c\Lambda\theta^2}}{\pi c\Lambda\theta^2}.$$

9. Теорема. Если P представляетъ вѣроятность, что

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$$

содержится между предѣлами $\pm 2t\sqrt{c\Lambda}$, то

$$\lim_{n=\infty} P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}$$

при условіи, что числа

$$|n\lambda_1|, |n\lambda_2| \ldots |n\lambda_n|$$

при возрастаніи n до ∞ содержатся между конечными положительными числами l и $L > l$.

Доказательство. Если въ 6, 7 и 8 положимъ произвольное число

$$\upsilon = 2t\sqrt{c\Lambda},$$

то для выраженій

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \Phi(\alpha) \frac{Sin 2t\alpha\sqrt{c\Lambda}}{\alpha},$$

$$P_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta d\alpha \Phi(\alpha) \frac{Sin 2t\alpha\sqrt{c\Lambda}}{\alpha},$$

$$P_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2} \frac{Sin 2t\alpha\sqrt{c\Lambda}}{\alpha},$$

$$P_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}$$

найдемъ неравенства

$$|P-P_1|\leq\frac{1}{\pi\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}},$$

$$|P_1-P_2|\leq\frac{2h\sqrt{3}}{\pi}log\left(\frac{2t\theta\sqrt{c\Lambda}}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{4t^2\theta^2c\Lambda}{3}}\right),$$

$$|P_2-P_3|\leq\frac{e^{-c\Lambda\theta^2}}{\pi c\Lambda\theta^2}.$$

Откуда, такъ какъ

$$P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}=P-P_1+(P_1-P_2)+(P_2-P_3),$$

$$\left|P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right|\leq\frac{1}{\pi\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}}+\frac{2h\sqrt{3}}{\pi}log\left(\frac{2t\theta\sqrt{c\Lambda}}{3}+\sqrt{1+\frac{4t^2\theta^2c\Lambda}{3}}\right)$$

$$+\frac{e^{-c\Lambda\theta^2}}{\pi c\Lambda\theta^2}. \qquad (1)$$

При этомъ должны выполняться слѣдующія условія

$$\left.\begin{array}{l} n>4,\ n>2\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 \\ \theta>\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r(n\lambda_0^2-2\lambda^2)}},\ \theta>\frac{2}{\lambda_0\sqrt{r(n-4)}} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\theta<\frac{1}{\lambda\varkappa} \qquad (3)$$

Второе, третье и четвертое изъ неравенствъ (2) можно написать такъ

$$n>2\left(\frac{n\lambda}{n\lambda_0}\right)^2, \quad \theta>\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{r\left([n\lambda_0]^2-\frac{2}{n}[n\lambda]^2\right)}},$$

$$\theta>\frac{2\sqrt{n}}{(n\lambda_0)\sqrt{r\left(1-\frac{4}{n}\right)}}.$$

Но произведенія $|n\lambda|$ и $|n\lambda_0|$ заключаются между l и L, и потому эти неравенства будутъ выполнены, если возьмемъ

$$n>2\frac{L^2}{l^2}, \quad \theta>\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{r\left(l^2-\frac{2L^2}{n}\right)}}, \quad \theta>\frac{2\sqrt{n}}{l\sqrt{r\left(1-\frac{4}{n}\right)}}.$$

Если выберемъ n такъ, чтобы, сверхъ того, было

$$l^2-\frac{2L^2}{n}>\frac{l^2}{2} \quad \text{и} \quad 1-\frac{4}{n}>\frac{1}{2},$$

для чего должно быть

$$n>\frac{4L^2}{l^2} \quad \text{и} \quad n>8,$$

то предыдущія неравенства для θ будутъ выполнены, если будетъ

$$\theta>\frac{2\sqrt{2n}}{l\sqrt{r}}.$$

Итакъ вмѣсто условій (2) имѣемъ

$$n>8, \quad n>\frac{4L^2}{l^2}, \quad \theta>\frac{2\sqrt{2n}}{l\sqrt{r}}. \qquad (4)$$

Что-же касается условія (3), то его можно написать такъ

$\theta < \frac{n}{(n\lambda)\varkappa}$ и, слѣдовательно, оно будетъ выполнено, если взять

$$\theta < \frac{n}{\varkappa L}.$$

Чтобы это неравенство было совмѣстно съ предыдущимъ, необходимо взять

$$n > \frac{8\varkappa^2 L^2}{r l^2}.$$

Итакъ, условія существованія неравенства (1) будутъ выполнены, если n будетъ превышать большее изъ чиселъ

$$8,\ \frac{4L^2}{l^2},\ \frac{8\varkappa^2 L^2}{r l^2} \qquad (5)$$

и если будетъ

$$\frac{2\sqrt{2n}}{l\sqrt{r}} < \theta < \frac{n}{\varkappa L}. \qquad (6)$$

Разсматривая вторую часть неравенства (1) и принявъ въ соображеніе значеніе чиселъ $\mathfrak{N}$ и h, видимъ, что выраженія, ее составляющія, зависятъ отъ трехъ произведеній:

$$\lambda\theta,\ \Lambda\theta^2 \text{ и } \lambda^2\Lambda\theta^4.$$

Для этихъ произведеній, замѣтивъ, что $|\lambda_p|$ содержится между $\frac{l}{n}$ и $\frac{L}{n}$, и, слѣдовательно Λ— между $\frac{l^2}{n}$ и $\frac{L^2}{n}$; имѣемъ:

$$\frac{l\theta}{n} < \lambda\theta < \frac{L\theta}{n},$$

$$l^2\left(\frac{\theta}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 < \Lambda\theta^2 < L^2\left(\frac{\theta}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2,$$

$$l^4\left(\frac{\theta}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^4 < \lambda^2\Lambda\theta^4 < L^4\left(\frac{\theta}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^4.$$

Отсюда видно, что достаточно выбрать θ безконечно большимъ вмѣстѣ съ n порядка выше $\frac{1}{2}$ и ниже $\frac{3}{4}$, напримѣръ $\theta=n^{\frac{2}{3}}$, чтобы съ возрастаніемъ n постоянно выполнялись условія (5) и (6), и было

$$\lim_{n=\infty}\lambda\theta=o,\ \lim_{n=\infty}\Lambda\theta^2=\infty,\ \lim_{n=\infty}\lambda^2\Lambda\theta^4=o.$$

Вслѣдствіе чего будетъ

$$\lim_{n=\infty}\mathfrak{R}=\infty$$

$$\lim_{n=\infty} h\log\left(\frac{2t\theta\sqrt{c\Lambda}}{3}+\sqrt{1+\frac{4t^2\theta^2c\Lambda}{3}}\right)=o$$

и, слѣдовательно, на основаніи (1),

$$\lim_{n=\infty}P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}.$$

10. Переходя къ способу наименьшихъ квадратовъ, разсмотримъ

$$\xi=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\ldots\ldots+\lambda_n\varepsilon_n,$$

линейную функцію ошибокъ ε_1, ε_2.. ε_n.

По предыдущей теоремѣ, вѣроятность, что ξ содержится между предѣлами $\pm 2t\sqrt{c\Lambda}$, имѣетъ предѣломъ при $n=\infty$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}. \qquad (1)$$

Такъ какъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha^2}=1,$$

то, при данномъ δ, можно взять t на столько большимъ, чтобы

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}<\frac{\delta}{2}. \qquad (2)$$

Далѣе, какому бы закону ни слѣдовали числа λ, можно, при выбранномъ t, найти такое N, что при $n>N$ будетъ

$$\left|P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right|<\frac{\delta}{2}. \qquad (3)$$

Тогда, такъ какъ

$$1-P=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}-\left(P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right),$$

будетъ

$$1-P\leqq\left|1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right|+\left|P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right|,$$

т. е., на основаніи (2) и (3),

$$1-P<\delta$$

или

$$P>1-\delta. \qquad (4)$$

Отсюда видимъ возможность выбрать n столь большимъ, чтобы можно было утверждать съ вѣроятностью, превышающей данное число, что ξ заключается между предѣлами $\pm 2t\sqrt{c\Lambda}$. Такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty}\Lambda=o$, то можно найти такое число $N'\geqq N$, чтобы при $n>N'$ было

$$2t\sqrt{c\Lambda}<\eta,$$

гдѣ η данное число; т. е., выбравъ n достаточно большимъ, можемъ съ вѣроятностью, превосходящей данное число, утверждать, что ξ содержится въ сколь угодно тѣсныхъ предѣлахъ. Это справедливо при всякомъ законѣ, которому слѣдуютъ числа $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ при возрастаніи n до ∞, лишь бы по абсолютной величинѣ онѣ содержались между $\frac{l}{n}$ и $\frac{L}{n}$. Но если эти числа выбраны такъ, что, при всякомъ n, доставляютъ функціи Λ minimum, то, утверждая съ вѣроятностью, превосходящей данное число, что ξ содержится между предѣлами $\mp 2t\sqrt{c\Lambda}$, мы будемъ имѣть возможно тѣсные предѣлы. Такой выборъ вообще считаемъ наиболѣе выгоднымъ.

11. Возьмемъ теперь систему уравненій

$$\left\{\begin{array}{c} a_{l,1}x_1+a_{l,2}x_2+\ldots+a_{l,m}x_m=v_l \\ l=1,\ 2,\ldots n;\ n>m, \end{array}\right. \tag{1}$$

гдѣ $a_{l,k}$—данныя числа; $x_1, x_2, \ldots x_m$—искомыя числа; $v_1, v_2, \ldots v_n$—числа, точно выражающія наблюдаемыя величины. Для опредѣленія x_p, умножимъ каждое уравненіе нашей системы на соотвѣтствующаго ему множителя $\lambda_{p,l}$ и сложимъ полученные результаты. Такимъ образомъ найдемъ

$$x_1\sum_{l=1}^{n}a_{l,1}\lambda_{p,l}+x_2\sum_{l=1}^{n}a_{l,2}\lambda_{p,l}+\ldots+x_p\sum_{l=1}^{n}a_{l,p}\lambda_{p,l}+\ldots+x_m\sum_{l=1}^{n}a_{l,m}\lambda_{m,l}$$
$$=\sum_{l=1}^{n}v_l\lambda_{p,l}\,.$$

Выберемъ сомножителей λ такъ, чтобы

$$\sum_{l=1}^{n}a_{l,1}\lambda_{p,l}=o,\ldots\sum_{l=1}^{n}a_{l,p-1}\lambda_{p,l}=o,\sum_{l=1}^{n}a_{l,p}\lambda_{p,l}=1,\sum_{l=1}^{n}a_{l,p+1}\lambda_{p,l}=o,\ldots$$
$$\ldots\sum_{l=1}^{n}a_{l,m}\lambda_{p,l}=o. \tag{2}$$

Тогда предыдущее уравненіе обратится въ

$$x_p = \sum_{l=1}^{n} v_l \lambda_{p,l} \,. \qquad (3)$$

Если искомыя числа $x_1, x_2, \ldots x_m$ выражаютъ существующія величины, то уравненія (1) совмѣстны при всякомъ n. Вторыя части этихъ уравненій, однако, неизвѣстны намъ, ибо изъ наблюденій мы получаемъ, вмѣсто точныхъ значеній $v_1, v_2, \ldots v_n$, значенія $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots \overline{v}_n$, содержащія ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, такъ что вообще $v_l = \overline{v}_l + \varepsilon_l$. Сообразно съ этимъ истинное значеніе x_p, по (3), будетъ

$$x_p = \sum_{l=1}^{n} \overline{v}_l \lambda_{p,l} + \sum_{l=1}^{n} \lambda_{p,l} \varepsilon_l$$

или

$$x_p = \overline{x}_p + \xi_p \,,$$

гдѣ

$$\overline{x}_p = \sum_{l=1}^{n} \overline{v}_l \lambda_{p,l} \,, \quad \xi_p = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{p,l} \varepsilon_l \,.$$

Здѣсь ξ_p представляетъ ошибку, происходящую вслѣдствіе того, что вмѣсто истиннаго рѣшенія x_p, мы беремъ рѣшеніе

$$\sum \overline{v}_l \lambda_{p,l} \,,$$

получаемое по нашему способу исключенія изъ неточныхъ уравненій. Ошибка въ числѣ x_p представляетъ, какъ видимъ, линейную функцію ошибокъ въ наблюдаемыхъ величинахъ. Отсюда, по 10, видно, что наивыгоднѣйшимъ выборомъ множителей λ будетъ тотъ, при которомъ, для всякого n, будетъ

$$\Lambda_p = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{p,l}^2 = \text{minimum} \,.$$

Множители λ опредѣляются уравненіями (2), число которыхъ m, по предположенію, меньше числа неизвѣстныхъ $\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, \ldots \ldots \lambda_{p,n}$. Поэтому системъ множителей, выполняющихъ исключеніе всѣхъ x, кромѣ x_p, т. е.—дающихъ равенство (3), будетъ безконечно много. Среди этихъ системъ значеній, должно найти ту, которая доставляетъ функціи Λ_p minimum. Для этого, по правиламъ ученія о наибольшихъ и наименьшихъ функцій, должно разсматривать, вмѣсто функціи Λ_p, функцію

$$\Omega_p = \Lambda_p - 2\alpha_{p,1}\sum_{l=1}^{n} a_{l,1}\lambda_{p,l} - \ldots - 2\alpha_{p,p}\sum_{l=1}^{n}\left(a_{l,p}\lambda_{p,l} - \frac{1}{n}\right) - \ldots$$

$$\ldots - 2\alpha_{p,m}\sum_{l=1}^{n} a_{l,m}\lambda_{p,l} \qquad (4)$$

или

$$\Omega_p = \sum_{l=1}^{n}\left\{\lambda_{p,l}^2 - 2\alpha_{p,1}a_{l,1}\lambda_{p,l} - \ldots - 2\alpha_{p,p}\left(a_{l,p}\lambda_{p,l} - \frac{1}{n}\right) - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - 2\alpha_{p,m}a_{l,m}\lambda_{p,l}\right\},$$

гдѣ $\alpha_{p,1}, \alpha_{p,2}, \ldots \alpha_{p,m}$ — неопредѣленные множители; и искать ея minimum. Уравнивая нулю частныя производныя этой функціи по перемѣннымъ $\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, \ldots \lambda_{p,n}$, находимъ уравненія

$$\lambda_{p,l} = \alpha_{p,1}a_{l,1} + \ldots + \alpha_{p,m}a_{l,m} \qquad (5)$$
$$l = 1, 2, \ldots n,$$

которыя въ соединеніи со (2) даютъ систему $n+m$ уравненій, изъ которыхъ, вообще говоря, найдется $n+m$ количествъ λ и α.—Чтобы убѣдиться, что найденная такимъ образомъ система значеній дѣйствительно доставляетъ функціи Λ_p minimum, находимъ

$$d^2\Omega_p = 2\sum_{l=1}^{n} d\lambda_{p,l}^2.$$

Отсюда видно, что всегда $d^2\Omega_p > o$. Поэтому найденная система значеній доставляетъ функціи Ω_p minimum при неограниченномъ измѣненіи перемѣнныхъ $\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, \ldots \lambda_{p,n}$. Изъ опредѣленія понятія minimum слѣдуетъ, что эта система будетъ доставлять minimum той-же функціи, если ограничиться лишь тѣми значеніями перемѣнныхъ, для которыхъ выполняются условія (2). Но для этихъ значеній Ω_p, какъ видно изъ (4), обращается въ Λ_p. Слѣдовательно, для найденной системы значеній, функція Λ_p будетъ имѣть дѣйствительно minimum по отношенію ко всѣмъ значеніямъ перемѣнныхъ, удовлетворяющимъ условіямъ (2).

Умножимъ теперь равенства (2) соотвѣтственно на $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2, \ldots \overline{x}_m$ и, сложивъ почленно, замѣнимъ во второй части $\overline{x}_p$ его выраженіемъ

$$\sum_{l=1}^{n} \overline{v}_l \lambda_{p,l}.$$

Перенеся всѣ члены въ одну часть уравненія, найдемъ окончательно

$$\sum_{l=1}^{n} (a_{l,1}\overline{x}_1 + a_{l,2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)\lambda_{p,l} = o$$

или, по (5),

$$\sum_{l=1}^{n} (a_{l,1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)(a_{l,1}\alpha_{p,1} + \ldots + a_{l,m}\alpha_{p,m}) = o,$$

т. е.

$$\begin{aligned} &\alpha_{p,1}\sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + a_{l,2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,1} + \\ &\alpha_{p,2}\sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + a_{l,2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,2} + \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\alpha_{p,m}\sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + a_{l,2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,m} = o. \end{aligned}$$

Такія уравненія получаются при $p=1, 2, 3, \ldots m$. Такимъ образомъ получается система однородныхъ уравненій, въ которой перемѣнными будутъ служить различныя суммы

$$\sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1+\ldots+a_{l,m}\overline{x}_m-\overline{v}_l)a_{l,\nu}$$

$$\nu=1,2,\ldots m,$$

а коэффиціентами—числа $\alpha_{l,\iota}$. Поэтому, если опредѣлитель

$$\Delta=\sum\pm\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\ldots\alpha_{m,m}\gtrless o,$$

то всѣ вышеуказанныя суммы должны приводиться къ нулю, т. е. должно быть

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1+\ldots+a_{l,m}\overline{x}_m-\overline{v}_l)a_{l,1}=o, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1+\ldots+a_{l,m}\overline{x}_m-\overline{v}_l)a_{l,m}=o. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Отсюда видимъ, что для опредѣленія значеній $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots \overline{x}_m$ должно поступить слѣдующимъ образомъ. Каждое изъ данныхъ уравненій умножить на коэффиціентъ въ немъ при x_1 и сложить полученныя уравненія; затѣмъ, каждое изъ данныхъ уравненій умножить на коэффиціентъ въ немъ при x_2 и сложить полученныя уравненія; и т. д. до x_m включительно. Такимъ образомъ получится m уравненій, изъ которыхъ опредѣлятся $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots x_m$. Итакъ приходимъ къ тому сочетанію линейныхъ уравненій, которое, подъ именемъ способа наименьшихъ квадратовъ, было опубликовано Legendre'омъ въ 1806 году [1]).

[1]) Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des comètes; avec un supplément contenant divers perfectionnemens de ces méthodes et leur application aux deux comètes de 1805. A Paris. Année 1806. pag. 72—80. Appendice. Sur la Méthode des moindres quarrés.—6 mars 1805.

Система уравненій, къ которой мы пришли, разрѣшима, если опредѣлитель ея

$$D=\begin{vmatrix} \sum_{l=1}^{n} a_{l,1}^2 & \sum_{l=1}^{n} a_{l,1}a_{l,2} & \ldots & \sum_{l=1}^{n} a_{l,1}a_{l,m} \\ \sum_{l=1}^{n} a_{l,2}a_{l,1} & \sum_{l=1}^{n} a_{l,2}^2 & \ldots & \sum_{l=1}^{n} a_{l,2}a_{l,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} a_{l,m}a_{l,1} & \sum_{l=1}^{n} a_{l,m}a_{l,2} & \ldots & \sum_{l=1}^{n} a_{l,m}^2 \end{vmatrix}$$

неравенъ нулю. Займемся теперь изслѣдованіемъ опредѣлителей D и Δ. Что касается перваго изъ нихъ, то, взглянувъ внимательно, замѣтимъ, что, по теоремѣ Cauchy,

$$D=\sum\begin{vmatrix} a_{l_1,1} & a_{l_1,2} & \ldots & a_{l_1,m} \\ a_{l_2,1} & a_{l_2,2} & \ldots & a_{l_2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l_m,1} & a_{l_m,2} & \ldots & a_{l_m,m} \end{vmatrix}^2,$$

гдѣ суммованіе распространяется на всевозможныя сочетанія $l_1, l_2, \ldots l_m$ изъ чиселъ $1, 2, \ldots n$. Отсюда видно, что D только тогда можетъ быть равенъ нулю, когда между линейными функціями, образующими лѣвыя части уравненій (1), нѣтъ ни одной системы m независимыхъ функцій. Въ этомъ случаѣ, если-бы намъ были извѣстны даже точныя значенія наблюдаемыхъ величинъ, данная система уравненій была-бы недостаточной для нахожденія неизвѣстныхъ. Мы предположимъ, напротивъ того, что ни одинъ изъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} a_{l_1,1} & a_{l_1,2} & \ldots & a_{l_1,m} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{l_m,1} & a_{l_m,2} & \ldots & a_{l_m,m} \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю. При каждомъ n существуетъ между ними наименьшій по абсолютной величинѣ. Если обозначимъ нижній

предѣлъ его абсолютной величины, при возрастаніи n до ∞, чрезъ g, то можетъ быть $g>o$ или $g=o$. Мы предположимъ, что $g>o$. Тогда, принявъ въ соображеніе число членовъ формулы, выражающей D, видимъ, что

$$D>\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}g^2. \tag{7}$$

Этимъ неравенствомъ воспользуемся дальше.—Для изслѣдованія Δ внесемъ выраженія (5) въ уравненія (2). Такимъ образомъ получимъ систему уравненій, опредѣляющихъ

$$\alpha_{p,1},\ \alpha_{p,2},\ldots\alpha_{p,m}:$$

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{p,1}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,1}^2+\alpha_{p,2}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,1}a_{l,2}+\ldots+\alpha_{p,m}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,1}a_{l,m}=o,\\
\alpha_{p,1}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,2}a_{l,1}+\alpha_{p,2}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,2}^2+\ldots+\alpha_{p,m}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,2}a_{l,m}=o,\\
\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
\alpha_{p,1}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,p}a_{l,1}+\alpha_{p,2}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,p}a_{l,2}+\ldots+\alpha_{p,m}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,p}a_{l,m}=1,\\
\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
\alpha_{p,1}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,m}a_{l,1}+\alpha_{p,2}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,m}a_{l,2}+\ldots+\alpha_{p,m}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{l,m}^2=o.
\end{array}\right\}\tag{8}$$

Откуда видимъ, что опредѣлитель этой системы также равенъ D. Изъ этой системы уравненій находимъ

$$\alpha_{p,l}=\frac{D_{p,l}}{D}, \tag{9}$$

гдѣ $D_{p,l}$ — частный опредѣлитель опредѣлителя D. Отсюда опредѣлитель

$$\Delta=\frac{\sum\pm D_{1,1}D_{2,2}\ldots D_{m,m}}{D^m}.$$

Но, по извѣстной теоремѣ,

$$\sum \pm D_{1,1} D_{2,2} \ldots D_{m,m} = D^{m-1}.$$

Поэтому

$$\Delta = \frac{1}{D}.$$

Отсюда видно, что $\Delta > o$.

Остается изслѣдовать измѣненія λ_p съ возрастаніемъ n до ∞. Положивъ

$$\sum_{l=1}^{n} a_{l,i} a_{l,k} = n A_{i,k}, \tag{10}$$

будемъ имѣть

$$D = n^m \begin{vmatrix} A_{1,1} \ldots A_{1,m} \\ \vdots \\ A_{m,1} \ldots A_{m,m} \end{vmatrix} = n^m E,$$

$$D_{p,l} = n^{m-1} E_{p,l},$$

гдѣ $E_{p,l}$ — частный опредѣлитель опредѣлителя E. Отсюда, по (9),

$$\alpha_{p,l} = \frac{1}{n} \cdot \frac{E_{p,l}}{E}.$$

Поэтому, на основаніи (5),

$$\lambda_{p,l} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_{l,1} E_{r,1} + a_{l,2} E_{p,2} + \ldots + a_{l,m} E_{p,m}}{E}. \tag{11}$$

Далѣе, при помощи (7), замѣтивъ, что

$$E = \frac{D}{n^m},$$

находимъ

$$E > \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{m-1}{n})}{1.2\ldots m} g^2.$$

Поэтому, и подавно,

$$E > \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots(1-\frac{m-1}{m})}{1.2\ldots m} g^2,$$

т. е.

$$E > \frac{g^2}{m^m}. \qquad (12)$$

Далѣе предположимъ, что коэффиціенты $a_{i,k}$ остаются конечными съ возрастаніемъ n до ∞, т. е.

$$|a_{i,k}| < a,$$

гдѣ a — нѣкоторое конечное число. Тогда будетъ, по (10),

$$|A_{i,k}| < a^2.$$

Опредѣлитель $E_{p,l}$, по абсолютной величинѣ, меньше того выраженія, которое получится, если каждый членъ опредѣлителя замѣнить его абсолютной величиной и всѣ полученныя величины сложить. Поэтому $|E_{p,l}|$ не превосходитъ нѣкоторой независящей отъ n величины. Отсюда, принявъ въ соображеніе неравенство (12), заключаемъ, на основаніи (11), что $|\lambda_{p,l}|$ также не превосходитъ $\frac{b}{n}$, гдѣ b—нѣкоторое независящее отъ n число. Поэтому $\lambda_{p,l}$ будутъ числами, безконечно малыми вообще того-же порядка, что и $\frac{1}{n}$ при безконечно возрастающемъ n.
